

Zestaw 8: Pochodne funkcji

Zad I) Wyznacz z definicji wartość $f'(2)$, gdzie $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Zad II) Wyznacz z definicji pochodne funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ ($x > 0$)

b) $g(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $u(x) = 4^x$

d) $w(x) = \sinh x$

Zad III) a) Sprawdź z definicji, czy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 2 \\ 2^x & \text{dla } x > 2. \end{cases}$$

b) Sprawdź z definicji, czy funkcja g jest różniczkowalna w punkcie $t_0 = 1$:

$$g(t) = \sqrt[3]{(t-1)^2}.$$

Zad IV) Określ wartości parametrów, by funkcja była różniczkowalna w całej dziedzinie:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ a \sin x + b \cos x + c & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi \\ 1 & \text{dla } x > \pi, \end{cases}$$

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} ae^x + b & \text{dla } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Zad V) Wyznacz pochodne funkcji złożonych:

a) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}\right)$

c) $f(x) = x^x$

d) $f(x) = x^{x^2}$

e) $f(x) = x^{x^{x^2}}$

f) $f(x) = \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)e^x$

g) $f(x) = \sqrt[3]{\arcsin(x^2)}$

h) $f(x) = \frac{2^{\sin^2 x}}{3^{\cos^2 x}}$

i) $f(x) = e^{e^x}$

j) $f(x) = \arcsin\left(\ln \frac{2-x}{2x-3}\right)$

k) $f(x) = 2^x \log_3(2x-1)^2$

1) $f(x) = \frac{-2}{\arccos^3(\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}))}$.

Interpretacja geometryczna pochodnej:

1) Znajdź równanie stycznej do krzywej o równaniu $g(t) = \arcsin \frac{t-1}{2}$ w punkcie jej przecięcia z osią Ot .

2) Dla jakich wartości zmiennej niezależnej styczne do krzywych o równaniach $y = x^2$ i $y = x^3$ są równoległe?

3) Znaleźć kąt przecięcia krzywych o równaniach $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$.

4) Wykazać, że krzywe o równaniach $y = 4x^2 + 2x - 8$ i $y = x^3 - x + 10$ są styczne w punkcie $P_0(3, 34)$.

5) W jakim punkcie styczna do paraboli $y = f(x) = x^2 + 1$:

a) jest równoległa do osi Ox ;

b) tworzy z dodatnim kierunkiem osi Ox kąt $\alpha = \frac{1}{3}\pi$?

6) Znaleźć kąt przecięcia krzywej o równaniu $f(x) = \ln x$ z osią Ox .

7) Dla jakich wartości parametru a parabola $y = ax^2$ jest styczna do krzywej o równaniu $y = \ln x$?

8) Dana jest funkcja $f : x \rightarrow \arcsin \frac{1}{1-x}$.

a) Wyznacz dziedzinę funkcji f ;

b) Wyznacz równania wszystkich asymptot wykresu funkcji f ;

c) Oblicz $f'(-1)$.

9) Znajdź równanie stycznej do krzywej $y = \frac{\pi}{6} + 2 - \arcsin(2x^2)$ w punkcie o odciętej $x_0 = -\frac{1}{2}$.