Zestaw 13: Całki krzywoliniowe skierowane

Zad 1) Oblicz całkę krzywoliniową skierowaną $\int\limits_K (x+y)^2 dx - (x^2+y^2)dy$, gdzie K jest brzegiem $\triangle ABC$ (zorientowanego $ABCA$), gdzie $A = (2,5)$, $B = (1,1)$, $C = (3,2)$.

Zad 2) Oblicz całkę $\int\limits_C 3x^2y - 3ydx + (x^3+y^3)dy$, gdzie C jest brzegiem okręgu $O((2,0),2)$ skierowanego ujemnie.

Zad 3) Za pomocą całki krzywoliniowej (i tw. Greena), wyprowadź wzór na pole powierzchni koła o promieniu R.

Zad 4) Oblicz $\int\limits_C \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2+y^2}$, gdzie $C: x(t) = a\cos t,\ y(t) = a\sin t,\ t \in [0,\pi]$.

Zad 5) Oblicz całkę krzywoliniową po rombie $\int\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, gdzie $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (-1,0)$, $D = (0,-1)$.

Zad 6) Dane jest pole wektorowe płaskie $\overrightarrow{F} = (P,Q)$, gdzie

$$P = (x+y+1)e^x - e^y, \qquad Q = e^x - (x+y+1)e^y.$$

Oblicz $\int\limits_K Pdx + Qdy$, gdzie K jest łukiem krzywej o równaniu

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$$

o poczatku leżącym na osi odciętych, końcu $(0,0)$, i który jest zawarty w I ćwiartce układu współrzędnych.

Zad 7) Wykaż, że całka

$$\int\limits_K \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$$

nie zależy od drogi całkowania K, jeżeli K jest krzywą gładką o początku A i końcu B leżącą w półpłaszczyźnie $\{(x,y)|x+y>0\}$. Oblicz tę całkę dla $A(5,0)$ i $B(2,3)$.

Zad 8) Czy pole wektorowe

$$\overrightarrow{F}=(2x,\frac{y}{1+y^2+z^2},\frac{z}{1+y^2+z^2})$$

jest potencjalne? Oblicz pracę siły $\overrightarrow{F}$ przy przemieszczeniu masy jednostkowej wzdłuż krzywej

$$x=\arccos \mathrm{t},\ \mathrm{y}=\arcsin \mathrm{t},\ \mathrm{z}=4\mathrm{arctg}\ \mathrm{t},\quad (0\leqslant \mathrm{t}\leqslant 1).$$

Zad 9) Oblicz całkę

$$\int\limits_{\Gamma}(y^2+x\ln(y+\sqrt{x^2+y^2}))dx+(\sqrt{x^2+y^2}+4x+2xy)dy,$$

gdzie Γ jest okręgiem o środku w punkcie $(2,1)$ i promieniu $\frac{1}{2}$, skierowanym zgodnie ze wskazówkami zegara.

Zad 10) Uzasadnij, że pole wektorowe

$$\overrightarrow{F}=(-1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2+y^2},\frac{z}{z^2+y^2}-\frac{xy}{z^2})$$

w pierwszym oktancie ($x>0,\ y>0,\ z>0$) jest potencjalne, a następnie oblicz pracę siły $\overrightarrow{F}$ przy przemieszczaniu masy jednostkowej wzdłuż odcinka

$$\Gamma:\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=et \qquad t\in[1,e]. \\ z(t)=et \end{cases}$$

Zad 11) Oblicz całkę

$$\int_K \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+e^y(y^2+\frac{1}{x^2+1})dy,$$

gdzie K jest krzywą o parametryzacji $x(t) = \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\pi}$, $y(t) = t^3 - 4t^2$, $t \in [0, 4]$.

Zad 12) Niech C oznacza okrąg o środku $(0, 0)$ i promieniu $R = 2$ skierowany „zgodnie ze wskazówkami zegara”. Oblicz

$$\int_K ydx + (x + x^2y^2)dy,$$

gdzie K jest sumą średnicy okręgu C od punktu $A = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ do punktu $B = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ oraz „dolnej” połowy okręgu C od punktu B do A.

Zad 13) Oblicz całkę krzywoliniową $\int_K (1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z})dx + (\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2})dy - (\frac{xy}{z^2} + 2z)dz$, gdzie K jest łukiem o parametryzacji

$$\begin{cases} x(t) = \sin^2 t \\ y(t) = \pi t + \cos^5 t \qquad t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]. \\ z(t) = 2 - \sin 5t \end{cases}$$

Zad 14) Oblicz całkę krzywoliniową $\int_K 2xydx + (x^2 - 2yz)dy + (4z - y^2)dz$, gdzie K jest krzywą o parametryzacji

$$\begin{cases} x(t) = \exp(\sin \pi t) \\ y(t) = \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\pi} \qquad t \in [0, 1]. \\ z(t) = 3t + 1 \end{cases}$$

Zad 15) Uzasadnij, że pole wektorowe $F = (x + \frac{y}{x^2+y^2}, y - \frac{x}{x^2+y^2})$ jest polem potencjalnym w obszarze $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$, znajdź potencjał tego pola, a następnie oblicz $\int_{(1,1)}^{(\sqrt{3},3)} (x + \frac{y}{x^2+y^2})dx + (y - \frac{x}{x^2+y^2})dy$.

Zad 16) Oblicz $\int_\Gamma 4xe^y dx + 2x^2(e^y - 1)dy$, gdzie krzywa Γ, będąca brzegiem obszaru ograniczonego krzywymi $y = x^2$, $y = 1$, $x = 0$, jest skierowana zgodnie z ruchem wskazówek zegara.