

**Zestaw 14: Ekstrema i ekstrema warunkowe funkcji wielu zmiennych**

**Zad 1)** Zbadaj ekstrema funkcji:

- a)  $f(x, y) \rightarrow z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ ;
- b)  $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ ,  $(x > 0, y > 0, z > 0)$ ;
- c)  $f(x, y, z) = 3 \ln x + 2 \ln y + 5 \ln z + \ln(22 - x - y - z)$ ;
- d)  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2+2x)}$ ;
- e)  $f(x, y) = (x^2 - 2y)e^{-y}$ ;
- f)  $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$ .

**Zad 2)** Wyznacz ekstrema lokalne funkcji  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y, z) = 5 - x - \frac{y^2}{4x} - \frac{z^2}{y} - \frac{2}{z},$$

gdzie  $\Omega = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$ .

**Zad 3)** Wyznacz ekstrema warunkowe funkcji

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

przy warunku  $x + 2y + z = 1$ .

**Zad 4)** Wyznacz ekstrema warunkowe funkcji określonych wzorami:

- a)  $f(x, y) = xy^2$ , jeżeli  $x + y = 1$ ;
- b)  $f(x, y, z) = xy^3z^3$ , jeżeli  $x + 2y + 3z = 6$  ( $x, y, z > 0$ );
- c)  $f(x, y, z) = xyz$ , jeżeli  $x + y + z = 0$  i  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Zad 5)** Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x - 16y$$

na zbiorze  $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 25\}$ .

**Zad 6)** Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji:

- a)  $f(x, y) = x^2y$  w zbiorze  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ;
- b)  $f(x, y) = y^2 - 5x^2$  w kole domkniętym o środku  $O(0, 0)$  i promieniu  $R = 3$ ;
- c)  $f(x, y) = 3x^2 - y^2$  w kole domkniętym o środku  $(0, 0)$  i promieniu 2;
- d)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 8y - 6x$  w zbiorze  $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 100, y \geq 0\}$ .

**Zad 7)** Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji:

- a)  $f(x, y, z) = x - 3y + 2z$  w kuli o środku  $(0, 0, 0)$  i promieniu 1;  
b)  $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2$  w kuli o środku  $(0, 0, 0)$  i promieniu 10;  
c)  $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 5z^2$  w zbiorze  $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ .

**Zad 8)** Znajdź wartości najmniejsze i największe funkcji:

- a)  $g(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$  na obszarze  $D : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ ;  
b)  $k(x, y) = x^2y(4 - x - y)$  na trójkącie, którego boki leżą na prostych  $x = 0$ ,  $y = 0$  i  $x + y = 6$ ;  
c)  $z(x, y) = x^2 - xy + y^2$  na obszarze  $D : |x| + |y| \leq 1$ .