Zestaw 1: Całka oznaczona - zastosowania

Zad I) Oblicz pole obszaru ograniczonego przez krzywe:
a) $\ln x$, $(\ln x)^2$;
b) $\arcsin x$, $x = -\frac{1}{2}$ i oś odciętych;
c) $f : [\frac{\pi}{2}, \pi] \ni x \to \cos^3 x \sin^2 x$ i oś odciętych
d) $f : x \to \sqrt{-x^2 - 2x + 1}$ i oś odciętych;
e) $y = x^2$, styczną do niej w punkcie $A(2, 4)$ i oś odciętych;
f) $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$;
g) $\frac{4 \ln x}{x}$, $x \ln x$.

Zad II) Oblicz pola powierzchni ograniczonych krzywymi:
a) $r = \sin \frac{1}{2}\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$;
b) $r(\varphi) = a\varphi$, $\varphi \in [0, \varphi_0]$;
c) $r(\varphi) = ae^{m\varphi}$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, $a, m > 0$;
d) $r(\varphi) = a(1 + \cos \varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $a > 0$.

Zad III) Wykorzystując współrzędne biegunowe oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:
a) $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y \geqslant 0$;
b) $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2))$, $a > 0$.
c) $(x^2 + y^2)^2 = 2a(x^2 - y^2)$, $a > 0$.

Zad IV) Oblicz długość łuku krzywej:
a) $y = x^2$ od $O(0, 0)$ do $A(2, 4)$;
b) $f(x) = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$;
c) $f(x) = a \ln \frac{x}{a}$, $0 \leqslant x \leqslant b$;
d) $x(t) = e^t \sin t$, $y(t) = e^t \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\pi$;
e) $x(t) = a \cos^3 t$, $y(t) = a \sin^3 t$, $a > 0$;
f) $x(t) = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y(t) = a(2 \sin t - \sin 2t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$;
g) $x = e^t$, $y = e^t \cos t$, $z = e^t \sin t$, $t \in [0; \pi]$.

Zad V) Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót krzywej o danym równaniu wokół osi $0X$:
a) $y = \sqrt[4]{8 - 2x - x^2}$;
b) $f(x) = \arcsin x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;
c) $f(x) = \text{ctg}^2 x$, $\frac{1}{6}\pi \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}\pi$;

Zad VI) Oblicz pole powierzchni bryły powstałej przez obrót wokół osi odciętych łuku krzywej:
a) $y = x^3$ między punktami $(0, 0)$ i $(2, 8)$;
b) $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ $(x_1 > -r, x_2 < r)$;
c) $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ $(a < b)$.

Zadania:

1) Oblicz pole figury ograniczonej osią odciętych i wykresem funkcji $f : x \to (x^2 - 9)e^x$.

2) Wykres funkcji $[3, 4] \ni x \to \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}} \in \mathbb{R}$ obraca się wokół osi odciętych. Oblicz objętość powstałej bryły obrotowej.

3) Krzywa o równaniu $y = \cos x$ obraca się dookoła osi odciętych tworząc nieskończenie wiele brył obrotowych. Oblicz objętość i pole powierzchni jednej z nich.

4) K jest łukiem krzywej o równaniu $y = (x + 2)e^x$ zawartym między osiami układu współrzędnych. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót łuku K wokół osi odciętych.

5) Oblicz długość krzywej będącej wykresem funkcji $[0, \frac{\pi}{3}] \ni x \to \ln \cos x \in \mathbb{R}$.

6) Oblicz długość łuku krzywej $y = 1 - \ln(\sin x)$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{4})$.

7) Oblicz długość łuku krzywej $y = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}))$, $1 \leqslant x \leqslant e$.

8) Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót krzywej $y = \sqrt{\sin^3 x}$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$, dookoła osi $0x$.

9) Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y^2 = 2x + 1$, $x - y - 1 = 0$.

10) Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót krzywej $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{-2x^3+4x^2-3x+1}}$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$, dookoła osi $0x$.

11) Oblicz pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej $f : [-2, 1] \ni x \to \sqrt{9 - x^2}$ wokół osi odciętych.

12) Oblicz pole obszaru płaskiego zawartego między osiami układu współrzędnych, prostą $x = 2$ i wykresem funkcji $g(x) = \frac{1}{\sqrt{(3-x)(x+1)}}$.

13) Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = x - 1$, $y = (x - 1) \ln x$.

14) Oblicz objętość bryły obrotowej otrzymanej przez obrót wokół osi $0x$ wykresu funkcji $f : \langle 1, e \rangle \to \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = \ln x$.

15) Oblicz pole tej części koła o środku w punkcie $O = (0, 0)$ i promieniu $R = \sqrt{2}$, która znajduje się wewnątrz paraboli $y = x^2$.

16) Oblicz całkę $\int\limits_2^3 \frac{2x^2+7x}{\sqrt{(x-1)(5-x)}}dx$.

17) Oblicz stosunek pól dwóch obszarów, na które parabola $x^2 = 6y$ dzieli koło o środku $(0,0)$ i promieniu 4.

18) Oblicz pole figury ograniczonej krzywą o równaniu $y = \ln x$, styczną do tej krzywj w punkcie o odciętej $x_0 = 4$ oraz osią odciętych.

19) Oblicz długość krzywej zadanej parametrycznie $x(t) = \cos t + \ln(\operatorname{tg} \frac{t}{2})$, $y(t) = \sin t$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi]$.