Zestaw 7: Geometria analityczna

Zad 1) Proste l_1 i l_2 dane są równaniami parametrycznymi:

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 - 4t, \\ y = -2t, \\ z = 2 + 4t, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}); \qquad l_2 : \begin{cases} x = 6 + 6t, \\ y = 4 + 3t, \\ z = -6t. \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Wykaż, że l_1 i l_2 sa równoległe. Oblicz odległość miedzy nimi. Znajdź równanie normalne ich wspólnej płaszczyzny.

Zad 2) Znajdź rzut prostokątny punktu $P = (6, 4, 0)$ na prostą

$$l : \begin{cases} x = 6 + 6t, \\ y = 4 + 3t, \\ z = -6t. \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

oraz punkt symetryczny do P względem tej prostej.

Zad 3) Zbadaj wzajemne położenie prostych

$$l_1 : \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = -3t, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}); \qquad l_2 : \begin{cases} x = -3 + 2t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = -3. \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Znajdź równanie ogólne ich wspólnej płaszczyzny (jezeli istnieje).

Zad 4) Zbadaj wzajemne położenie prostych

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 - 3t, \\ z = 5 + 4t, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}); \qquad l_1 : \begin{cases} x = 7 + 3t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 1 - 2t. \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Jeżeli te proste leżą na jednej płaszczyźnie, to znajdź jej równanie ogólne.

Zad 5) Napisz równanie ogólne płaszczyny przechodzącej przez punkty $A = (-1, 2, 4)$, $B = (2, 1, 3)$ i $C = (3, -1, 5)$. Znajdź punkt symetryczny do punktu $Q = (5, 0, 8)$ względem tej płaszczyzny.

Zad 6) Zbadaj wzajemne położenie prostych

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = t, \\ z = 2, \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}); \qquad l_2 : \begin{cases} x = 3, \\ y = t, \\ z = -t. \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Jeżeli leżą one na jednej płaszczyźnie, to napisz jej równanie w postaci normalnej. Jeżeli nie, to oblicz odległość między tymi prostymi.

Zad 7) Znajdź rzut prostokątny punktu $A = (-3, 2, 0)$ na płaszczyznę $\pi : x + y + z = 0$.

Zad 8) Znajdź rzut prostokątny prostej $k : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{2}$ na płaszczyznę $\pi : x + y - 2z + 4 = 0$.

Zad 9) Znajdź punkt symetryczny do punktu $P = (2, 3, -1)$ względem:
a) płaszczyzny $\pi : 2x - y + z - 6 = 0$;
b) prostej $l : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$;
c) punktu $S = (1, -1, 2)$.

Zad 10) Znajdź odległość prostej $l : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-1}$ od płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - s + 3t \\ y = 2 - 2s - 2t \\ z = -1 + s - t \end{cases} \qquad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Zad 11) Napisz równanie płaszczyzny, która zawiera prostą

$$x = 1 + 2t, \quad y = 5 + t, \quad z = 4t \quad (t \in \mathbb{R})$$

i jest prostopadła do płaszczyzny stycznej w punkcie $P(1, 1, \pi)$ do powierzchni o równaniu $z = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$.

Zad 12) Na powierzchni $z = xy$ znajdź punkt, w którym płaszczyzna styczna do tej powierzchni jest prostopadła do prostej

$$\begin{cases} x - y + 17 = 0 \\ y + 2z - 19 = 0. \end{cases}$$

Napisz równanie tej płaszczyzny stycznej.

Zad 13) Oblicz pochodną kierunkową funkcji

$$g : (x, y, z) \to z^2 \arcsin \frac{xz}{\sqrt{12 + x^2 + y^2}} - \frac{\pi z}{3}$$

w punkcie $M(2, 0, -1)$ w kierunku wektora normalnego płaszczyzny

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4s + 2t \\ z = -1 + 2s + 4t \end{cases} \qquad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Zad 14) Znajdź równanie płaszczyzny normalnej do krzywej będącej przecięciem dwóch powierzchni $x^2 + z^2 = 10$ oraz $y^2 + z^2 = 10$ w punkcie $P(1, 1, 3)$. Oblicz objętość czworościanu ograniczonego tą płaszczyzną oraz płaszczyznami układu współrzędnych.

Zad 15) Na krzywej

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

znajdź punkt o współrzędnych całkowitoliczbowych, w którym styczna do tej krzywej jest równoległa do płaszczyzny

$$\pi : x + 2y + z + 4 = 0.$$

Oblicz odległość między płaszczyzną π a tą styczną.
Napisz równanie (w postaci ogólnej) płaszczyzny zawierającej tą styczną i prostopadłej do płaszczyzny π.

Zad 16) Napisz równanie stycznej w punkcie $M = (3, 0, 1)$ do krzywej o parametryzacji

$$\begin{cases} x = 2 + t^2 \\ y = \ln(t^3 + 2) \\ z = t^2 e^{3t+3}. \end{cases}$$

Znajdź rzut prostokątny punktu $Q = (0, -3, -3)$ na tę styczną. Znajdź punkt symetryczny do Q względem tej stycznej.

Zad 17) Oblicz pochodną kierunkową funkcji

$$f : (x, y, z) \to xy^2 \arcsin \frac{x}{z^2} + \frac{3\pi x}{2}$$

w punkcie $P(-2, 3, 2)$ w kierunku wersora normalnego płaszczyzny danej równaniem parametrycznym

$$\begin{cases} x = -2 + 2s + 2t \\ y = 3 - 5t \\ z = 2s - 4t \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Zad 18) Wyznacz pochodną kierunkową funkcji

$$g : (x, y, z) \to y \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2 + y^2 + 1}{z^2 + 1}$$

w punkcie $P(0, -1, 1)$ w kierunku wersora kierunkowego prostej

$$\begin{cases} 2x - z + 7 = 0 \\ 2x - 5y + 4z = 0. \end{cases}$$

Zad 19) Znajdź równania stycznych do powierzchni o równaniu

$$z = y + \ln \frac{x}{z}$$

w punktach $A(1, 1, 1)$ i $B(2, 2, 2)$. Napisz równanie parametryczne ich wspólnej krawedzi.

Zad 20) Napisz równanie ogólne stycznej do powierzchni o równaniu

$$z - y - \ln \frac{x}{z} = 0$$

w punkcie $P = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Znajdź punkt symetryczny do punktu $Q = (7, 1, 4)$ względem tej stycznej.

Zad 21) Napisz równanie ogólne i parametryczne płaszczyzny H, która zawiera prostą

$$l : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$

i jest prostopadła do płaszczyzny stycznej w punkcie $P = (1, e, 1)$ do powierzchni o równaniu $z = x \ln \frac{y}{z}$.

Zad 22) Oblicz pochodną kierunkową funkcji

$$f : (x, y, z) \to \frac{1}{x} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{1 - z^2}$$

w punkcie $A = (1, 1, 0)$ w kierunku wersora normalnego płaszczyzny danej równaniem

$$\begin{cases} x = -2 + 2s + 2t \\ y = 3 - 5t \\ z = 2 + s - 4t \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Zad 23) Napisz równanie stycznej do krzywej danej równaniem parametrycznym

$$\begin{cases} x = 3 + \operatorname{arc\,tg}(t-1)^2 \\ y = 5 \\ z = te^{3-3t} \end{cases}$$

w punkcie $P = (3, 5, 1)$. Zbadaj wzajemne położenie tej stycznej oraz prostej

$$l : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 7 + 3t. \end{cases}$$

Jeżeli leżą one na jednej płaszczyźnie, to napisz jej równanie w postaci normalnej. Jeżeli nie, to oblicz odległość między tymi prostymi.

Zad 24) Napisz równanie płaszczyzny zawierającej styczną w punkcie $A(0, 2, 0)$ do krzywej o parametryzacji

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = \frac{t^2}{\pi} - \frac{\pi}{4} \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

i jednocześnie prostopadłej do płaszczyzny stycznej w punkcie $B(1, 2, 3)$ do powierzchni o równaniu

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0.$$

Zad 25) Znajdź rzut stycznej do wykresu krzywej $\Gamma : \begin{cases} x = \frac{1}{\cos t} \\ y = \mathrm{ctg} t \\ z = t^2 \end{cases}$ w punkcie $A = (2, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi^2}{9})$ na płaszczyznę styczną do wykresu powierzchni S : $e^{\frac{x}{y}} + z \arccos xy^2 z^2 = 1$ w punkcie $B = (0, 1, 0)$.

Zad 26) Napisz równanie parametryczne i ogólne płaszczyzny zawierającej styczną w punkcie $A = (0, 1, 0)$ do krzywej o parametryzacji

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \frac{t}{\pi} - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

i jednocześnie prostopadłej do płaszczyzny stycznej w punkcie $B = (1, 1, -1)$ do powierzchni o równaniu $y + \ln \frac{x}{z} - z = 0$.

Zad 27) Wyznacz z definicji pochodną kierunkową w punkcie $P(0, 1)$ w kierunku wektora $v = (-1, 1)$ funkcji:
a) $f(x, y) = \sqrt{(y-1)^2 + x^2}$;
b) $g(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.