

Zestaw 8: Funkcje uwikłane

Zad 1) Dla danego równania

$$4xy = x^2 + y^4 \quad (*)$$

- wyznacz warunki jakie musi spełniać punkt $P(x, y)$, by równanie $(*)$ określało w nim funkcję $x \rightarrow y$;
- wyznacz (2 sposobami) $\frac{dy}{dx}$ dla funkcji uwikłanych $x \rightarrow y$ określonych równaniem $(*)$;
- wyznacz (2 sposobami) $\frac{d^2y}{dx^2}$ dla funkcji uwikłanych $x \rightarrow y$ określonych równaniem $(*)$;
- wyznacz ekstrema lokalne funkcji uwikłanych $x \rightarrow y$ określonych równaniem $(*)$.

Zad 2) Wyznacz y' oraz y'' dla funkcji uwikłanych $x \rightarrow y$ określonych równaniami:

- $x^3y - xy^3 = 1$;
- $y - \arctg y - x^3 = 0$;
- $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$.

Zad 3) Dla punktu $(0, 1)$, znajdź drugie pochodne funkcji uwikłanych określonych równaniami:

- $x^2 - xy + y^2 = 1$;
- $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$.

Zad 4) Wyznacz ekstrema lokalne funkcji uwikłanych $x \rightarrow y$ określonych równaniami:

- $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$;
- $y^2 - 2yx^2 + 4x = 3$;
- $y^4 - 8xy = 4y - 8x^2$;
- $x^2 + 2x + 1 = 2xy - 2y^2$;
- $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Zad 5) Wyznacz wszystkie pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego funkcji uwikłanych $(x, y) \rightarrow z$ określonych równaniem

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0.$$

- Zad 6)** a) Sprawdź, że równanie $e^z - xyz = 0$ wyznacza wokół punktu $A(e, \frac{1}{2}e, 2)$ funkcję uwiklaną $(x, y) \rightarrow z$;
- b) Oblicz $\frac{\partial z}{\partial x}(e, \frac{1}{2}e)$;
- c) Oblicz $\frac{\partial z}{\partial y}(e, \frac{1}{2}e)$;
- c) Oblicz $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(e, \frac{1}{2}e)$;
- d) Oblicz $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(e, \frac{1}{2}e)$;
- e) Oblicz $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(e, \frac{1}{2}e)$.