ALGEBRA - Zestaw 2: Relacje

Zad 1) Dane są relacje $R = (\mathbb{N}, \mathrm{grR}, \mathbb{N}), \mathrm{S} = (\mathbb{N}, \mathrm{grS}, \mathbb{N})$, gdzie:

$\mathrm{grR} = \{(1,1), (1,2), (3,2), (3,4), (3,7), (2,9), (5,3)\}$,

$\mathrm{grS} = \{(1,2), (1,7), (2,5), (2,4), (7,9), (4,10)\}$.

Znajdź dziedziny i przeciwdziedziny tych relacji. Utwórz relacje $R \circ S$, $S \circ R$, S^{-1}, R^{-1}, $S^{-1} \circ R^{-1}$, $(S \circ R)^{-1}$, $S^{-1} \circ R$. Sprawdź, że $S^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ S)^{-1}$.

Zad 2) Udowodnij, że dla dowolnej relacji R zachodzi implikacja:

$\mathrm{gr}R^{-1} \subset \mathrm{gr}R \Rightarrow \mathrm{gr}R^{-1} = \mathrm{gr}R$.

Zad 3) Wykaż, że dla relacji zwrotnej R, równość $R \circ R = R$ jest równoważna „przechodności" relacji R.

Zad 4) Wykaż, że dla zbioru X z relacją R:

$$R \text{ jest relacją równoważności } \Leftrightarrow R^{-1} \text{ jest relacją równoważności.}$$

Zad 5) Wykaż, że jeżeli relacja R określona w zbiorze X jest zwrotna i przechodnia, to $R \cap R^{-1}$ określa relację równoważności.

Zad 6) W zbiorze $\mathbb{N}^2$ dana jest relacja $R = (\mathbb{N}^2, \mathrm{grR}, \mathbb{N}^2)$ taka, że $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c$. Wykaż, że R jest relacją równoważności i znajdź zbiór ilorazowy.

Zad 7) Niech $k \in \mathbb{N}_+$. W zbiorze $\mathbb{Z}$ wprowadzamy relację $m \equiv n (\mathrm{mod}\ k) \Leftrightarrow k|(m-n)$. Wykaż, że relacja ta jest równoważnością. Zbiór ilorazowy tej relacji będziemy oznaczać przez $\mathbb{Z}/k$. Przyjmując $k = 7$ podaj:

a) $[2]$, $[5]$, $[-5]$ (klasy równoważności);

b) $\mathbb{Z}/7$.

Zad 8) Niech p będzie elementem zbioru X. W zbiorze 2^X podzbiorów zbioru X określamy relację $R = (2^X, \mathrm{gr}R, 2^X)$:

$$\mathrm{gr}R := \Big\{(A,B) \in 2^X \times 2^X :\ (A = B) \vee (p \notin A \cup B)\Big\}$$

Czy R jest relacją równoważności?

Zad 9) Dane jest odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Niech $S = (\mathbb{R}, \mathrm{gr}S, \mathbb{R})$ będzie relacją taką, że $\mathrm{gr}S = \{(x,y) : f(x) = f(y)\}$.

a) Wykaż, że S jest relacją równoważności;

b) Niech $a \in \mathbb{R}$. Określ w zależności od a liczebność klasy równoważności $[a]$.

Zad 10) Wykaż, że jeżeli R jest relacją porządkującą na zbiorze X, to relacja R^{-1} jest również relacją porządkującą na zbiorze X.

Zad 11) Niech $(X, \preceq)$ będzie zbiorem uporządkowanym, $A \subset X$. Udowodnij, że jeżeli zbiór A ma element najmniejszy (największy), to ten element jest również kresem dolnym (odp. górnym) zbioru A.

Zad 12) Niech $R = (\mathbb{R}^2, \mathrm{gr}R, \mathbb{R}^2)$, gdzie: $(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow x \leqslant x' \wedge y \leqslant y'$.
a) Wykaż, że R jest relacją porządku. Czy ten porządek jest liniowy?
b) Znajdź zbiory minorant i majorant oraz kresy zbiorów $A = \{(1, 2), (3, 1)\}$, $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 9\}$;
c) Czy zbiory A i B mają elementy największe i najmniejsze oraz minimalne i maksymalne?

Zad 13) Niech $S = (\mathbb{R}^2, \mathrm{gr}S, \mathbb{R}^2)$, gdzie:
$(x_1, y_1)S(x_2, y_2) \Leftrightarrow \ln(1 + x_1^2 + y_1^2) = \ln(1 + x_2^2 + y_2^2)$.
Czy tak określona relacja S jest porządkiem w $\mathbb{R}^2$?
Czy jest to relacja równoważności?

Zad 14) W zbiorze punktów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ określamy relację $\preceq$:

$$[(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)] \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leqslant y_2)).$$

Wykaż, że $\preceq$ porządkuje zbiór $\mathbb{R}^2$. Czy jest to porządek totalny w $\mathbb{R}^2$?

Zad 15) Dany jest uporządkowany zbiór $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ oraz podzbiór $A = \{x : x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, n, m \in \mathbb{N}_+\}$. Znajdź kresy zbioru A oraz element największy i element najmniejszy (o ile istnieją). Czy zbiór A stanowi łańcuch?

Zad 16) Niech $X = \{1, \ldots, n\}$ $(n > 2)$. Rozważmy rodzinę Y tych podzbiorów zbioru X, które są niepuste i mają co najwyżej $n - 1$ elementów. Wyznacz elementy minimalne i maksymalne zbioru Y względem relacji inkluzji. Czy Y ma element największy lub element najmniejszy?

Zad 17) Niech będzie dany zbiór uporządkowany $(X, \subset)$, gdzie $X = \{[x, x + a] \times [y, y + a] : \ x, y, a \in \mathbb{R}, \ a \geqslant 0\}$ oraz zbiór $A = \{[1, 4] \times [1, 4]; [2, 5] \times [2, 5]; [2, 5] \times [3, 6]; [2, 6] \times [2, 6]\} \subset X$. Wyznacz (o ile istnieją) elementy najmniejsze, największe, minimalne, maksymalne, zbiory minorant, majorant oraz kres dolny i górny zbioru A względem zadanego porządku w X.