

ALGEBRA - Zestaw 4: Przestrzenie wektorowe

Zad 1) Niech $A = \{0, 1\}$. W zbiorze A określamy działanie \oplus przyjmując: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$, oraz działanie \odot przyjmując: $0 \odot 0 = 0 \odot 1 = 1 \odot 0 = 0$, $1 \odot 1 = 1$.

a) Sprawdź, że (A, \oplus, \odot) jest ciałem.

W zbiorze A^2 określamy działanie dodawania jako: $(a, b) + (c, d) = (a \oplus c, b \oplus d)$, oraz mnożenie przez elementy z ciała A następująco: $\alpha \cdot (a, b) = (\alpha \odot a, \alpha \odot b)$.

b) Sprawdź, czy $(A^2, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem A .

c) Wykaż, że przestrzeń A^2 posiada dokładnie pięć podprzestrzeni.

Zad 2) Sprawdź, które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami przestrzeni \mathbb{R}^3 :

- a) $A = \{(x, y, z) : x + y + z = a, a \in \mathbb{R}\}$ b) $B = \{(x, y, z) : x \geq 0\}$
c) $C = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$ d) $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
e) $E = \{(x, y, z) : x = 2y \wedge z = 0\}$ f) $F = \{(x, y, z) : 3x + 2y - 8z = 0\}$

Zad 3) Które z następujących podzbiorów przestrzeni wektorowej $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ są jej podprzestrzeniami:

- a) $A = \{f : f(2) = f(7)\}$ b) $B = \{f : f(7) = 2 + f(1)\}$
c) $C = \{f : f(x_0) = 3\}$

Zad 4) Które z następujących podzbiorów przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}[x]$ (przestrzeń wielomianów nad ciałem \mathbb{R}) są jej podprzestrzeniami:

- a) $A = \{w : w(0)w(1) = 0\}$ b) $B = \{w : \text{stopień } w \leq 6\}$
c) $C = \{w : \text{stopień } w = 6\}$ d) $D = \{w : w(x) \text{ jest podzielne przez } x^2 + 1\}$

Zad 5) Zbadaj, które z układów wektorów należących do \mathbb{R}^3 są liniowo niezależne:

- a) $B_1 : (1, 4, 3), (-1, 2, 1), (0, 6, 4)$,
b) $B_2 : (2, 3, -1), (2, 0, 0), (0, 3, 1)$,
c) $B_3 : (2, -7, 2), (0, 2, 4), (2, -1, 5)$.

Znajdź współrzędne wektora $(1, 1, 1)$ względem tych B_i , które stanowią bazę w \mathbb{R}^3 .

Zad 6) Sprawdź liniową zależność wektorów $\sqrt{2}$ i 2 w przestrzeni $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nad ciałem \mathbb{Q} oraz w przestrzeni $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nad ciałem \mathbb{R} .

Zad 7) Dla jakiej wartości parametru k wektor $v = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$ jest kombinacją liniową wektorów $u_1 = (1, 1, 1)$ i $u_2 = (1, 2, 3)$?

Zad 8) Sprawdź, czy następujące funkcje są liniowo niezależne w przestrzeni $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

- a) $f = Id, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x$;
 b) $f(x) = 1, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x, p(x) = \sin^2 x, q(x) = \cos^2 x$.

Zad 9) W \mathbb{R}^3 dane są trzy wektory: $u = (0, 1, -1), v = (-1, 0, 1), w = (1, -1, 0)$.

- a) Wykaż, że wektory te są parami niezależne.
 b) Czy układ wektorów u, v, w jest liniowo niezależny?
 c) Podaj wymiar oraz bazę podprzestrzeni generowanej przez te wektory.

Zad 10) Udowodnij, że zbiór: $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0, x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni \mathbb{R}^4 . Wyznacz bazę tej podprzestrzeni oraz bazy podprzestrzeni z zadania 2.

Zad 11) Dane są dwa układy wektorów: $B_1 : (1, i, 1+i), (i, -1, 2-i), (0, 0, 3)$ i $B_2 : (2i, 1, 0), (2, -i, 1), (0, 1+i, 1-i)$.

- a) Sprawdź, czy któryś z tych układów stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{C}^3(\mathbb{C})$ lub $\mathbb{C}^3(\mathbb{R})$.
 b) Jaki wymiar mają przestrzenie $\mathbb{C}^n(\mathbb{C})$ i $\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$?
 c) Znajdź współrzędne wektora $(1, 0, 1)$ w bazie z podpunktu a).

Zad 12) Niech będzie dana następująca podprzestrzeń U przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ (tj. przestrzeni \mathbb{C}^2 nad ciałem liczb rzeczywistych \mathbb{R}), gdzie p jest pewną liczbą rzeczywistą:

$$U := \text{Lin}\{(pi, (p-1)i), (p-2-pi, p), (-1-pi, 2p)\}.$$

Zbadaj dla jakich wartości parametru rzeczywistego p , zachodzi:

$$(3-2p, p-1+(1-p)i) \in U.$$

Dla wszystkich takich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, wyznacz $\dim U$.

Zad 13) Wyznacz bazę przestrzeni $(P_{2n}, +, \cdot)$ nad ciałem \mathbb{R} , gdzie $P_{2n} := \{w \in \mathbb{R}[x]_{2n} : w(x) = w(-x)\}$.

Zad 14) W przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]_2$ dana jest baza $B_1 = (1, x, x^2)$. Wykaż, że układ $B_2 = (1, x-2, (x-2)^2)$ stanowi bazę $\mathbb{R}[x]_2$. Podaj współrzędne wielomianu $P(x) = 2x^2 + 3$ względem obu baz. Czy zbiór $A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(1) = p'(0)\}$ stanowi podprzestrzeń tej przestrzeni? Jeżeli tak, wyznacz jej bazę i wymiar.

Zad 15) Wykaż, że zbiór liczb postaci $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} + e\sqrt{12} : a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}\}$ tworzy przestrzeń wektorową nad ciałem liczb wymiernych. Znajdź bazę tej przestrzeni.

Zad 16) Wiedząc, że wektory u, v, w stanowią bazę przestrzeni liniowej V (nad ciałem \mathbb{R}), zbadaj, który z poniższych układów także stanowi jej bazę:
 a) $B_1 = (u-2v+w, 3u+w, u+4v-w),$ b) $B_2 = (u, 2u+v, 3u-v+4w).$

Wyznacz współrzędne wektora $a = 2u - 3v + 8w$ względem tej bazy.

Zad 17) Wykaż, że dla dowolnych $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ takich, że $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$, wielomiany w_0, w_1, \dots, w_n , zdefiniowane jako:

$$w_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n,$$

stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_n$.

Zad 18) Niech $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, a V_1, V_2 będą podzbiorami V składającymi się, odp., z odwzorowań nieparzystych oraz parzystych. Wykaż, że V_1, V_2 są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V oraz, że $V = V_1 \oplus V_2$.

Zad 19) Niech $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Oznaczmy przez F_a zbiór odwzorowań zerujących się w punkcie a .

- Wykaż, że F_a jest podprzestrzenią przestrzeni V ;
- Udowodnij, że jeżeli $a \neq b$, to $V = F_a + F_b$, ale suma ta nie jest prosta.

Zad 20) Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K oraz U i V jej podprzestrzeniami.

- Wykaż, że $U \cup V$ jest podprzestrzenią X wtedy i tylko wtedy, gdy $U \subset V$ lub $V \subset U$;
- Sprawdź, czy $\text{Lin}(U \cup V) = U + V$.