ALGEBRA - Zestaw 5: Wyznaczniki, rząd i macierz odwrotna

Zad 1) Zbadaj rzędy następujących macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ -3 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zad 2) Wyznacz rzędy następujących macierzy w zależności od parametru rzeczywistego p:

$$A = \begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} p-1 & p-1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2-1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & p-1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zad 3) Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, rząd macierzy:

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & -1-a & 1 \\ a & 0 & -a \\ -1 & a+a^2 & 1 \end{bmatrix}$, b) $B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

jest najmniejszy, a dla jakich największy?

Zad 4) Oblicz wyznacznik macierzy i jeśli jest ona nieosobliwa, znajdź macierz do niej odwrotną:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$ e) $E = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -9 \end{bmatrix}$ g*) $G_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$

Zad 5) Niech A będzie macierzą kwadratową. Udowodnij, że:
a) jeżeli $A^2 - A + I = 0$, to A jest nieosobliwa i $A^{-1} = I - A$;
b) jeżeli $A^k = \mathbf{0}$, to $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}$ (dla $k \geqslant 1$).

Zad 6) Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy rzeczywistej A stopnia n, jeżeli:
a) $A^2 = A^T$ b) $A^T - A^{-1} = \mathbf{0}$ c) $A^2 + A^{-1} = \mathbf{0}$.

Zad 7) Sprawdź dla jakich wartości parametru rzeczywistego p macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & p & p & p \\ p & 1 & p & p \\ p & p & 1 & p \\ p & p & p & 1 \end{bmatrix} \text{ jest nieosobliwa.}$$

Wyznacz wymiar przestrzeni

$$\mathrm{Lin}\{(1,p,p,p);(p,1,p,p);(p,p,1,p);(p,p,p,1)\}$$

w zależności od wartości parametru p.

Zad 8) Niech będzie dany następujący podzbiór N zbioru $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$:

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Sprawdź, czy para $(N, \cdot)$, gdzie „$\cdot$” oznacza mnożenie macierzy, jest grupą abelową.

Zad 9) Zadana jest macierz ortogonalna $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (tj. $A^T A = AA^T = I$). Rozwiąż równanie, gdzie X jest niewiadomą macierzą, a I jest macierzą jednostkową:

$$AX\left(A^T\right)^2 = -I^3.$$

Zad 10) Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Sprawdź, czy: $A^T A = I \Rightarrow AA^T = I$.

Zad 11) Wykaż, że n-ta potęga macierzy diagonalnej, $n \geqslant 1$, jest macierzą diagonalną.

Zad 12) Uzasadnij, że wyznaczynik macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $(n > 1)$ o wyrazach nieparzystych jest liczbą parzystą.