Kolokwium 2

Algebra liniowa

19 stycznia 2018

Zadanie 1 (15p)**.** Zbadaj wzajemne położenie prostych l_1, l_2 w zależności od parametrów p, q.

$$l_1\colon \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = -3p \cdot t \end{cases} \qquad l_2\colon \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = p \cdot t \\ z = q - 12t \end{cases}$$

Zadanie 2 (5p+5p)**.** Dane jest odwzorowanie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ określone jako: $f(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$ oraz baza $B = ((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$.

(a) Wyznacz $\operatorname{Ker} f$ oraz $\operatorname{Im} f$.

(b) Znajdź macierz odwzorowania f w bazie B.

Zadanie 3 (15p)**.** Niech $f\colon V \to V$ oraz niech $B = (e_1, e_2, e_3)$ będzie bazą przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{R}$, gdzie $f(e_1) = -e_1$, $f(e_2) = 2e_1 + e_2$, $f(e_3) = 2e_1 + 2e_2 - e_3$. Wyznacz macierz A odwzorowania f w bazie B oraz zbadaj diagonalizowalność tego endomorfizmu. Jeżeli endomorfizm jest diagonalizowalny, wyznacz bazę B' taką, że $D = M_f(B')$ jest macierzą diagonalną oraz podaj tę macierz.

Zadanie 4 (10p)**.** Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{R}$, niech $f\colon V \to W$, $g\colon V \to W$, $h\colon W \to V$ będą odwzorowaniami liniowymi oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że αf, $f + g$, $h \circ f$ też są odwzorowaniami liniowymi.