# Kolokwium 1

Algebra liniowa

21 listopada 2018

**Zadanie 1** (5p+5p). Rozwiąż równania. Wyniki podaj w postaci algebraicznej.

(a) $(\overline{iz})^2 - 2\overline{iz} + i\sqrt{3} = 0$

(b) $z^2|z| = -\overline{z}$

**Zadanie 2** (4p+6p). Dana jest relacja $(\mathbb{R}, grR, \mathbb{R})$ taka, że $xRy \Leftrightarrow [x] = [y]$, gdzie $[x]$ nazywamy częścią całkowitą (podłogą, cechą dolną) liczby $x$ i jest to największa liczba całkowita mniejsza lub równa $x$ (na przykład $[\frac{3}{2}] = 1$, $[-2] = -2$).

(a) Czy jest to relacja porządku, czy równoważności? Udowodnij.

(b) Jeżeli jest to relacja porządku, wskaż elementy minimalne i maksymalne, lub udowodnij że nie istnieją. Jeżeli jest to relacja równoważności, wyznacz jej zbiór ilorazowy.

**Zadanie 3** (15p). Dany jest zbiór $X$ zawierający przynajmniej dwa elementy. W $2^X$, czyli rodzinie wszystkich jego podzbiorów, określamy następujące działania:

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$
$$A \odot B = (A \cap B).$$

Wiedząc, że działanie $\oplus$ jest łączne, a działanie $\odot$ jest rozdzielne względem $\oplus$, wykaż że $(2^X, \oplus, \odot)$ jest pierścieniem przemiennym z jednością i z dzielnikami zera.

**Zadanie 4** (6p+9p). W przestrzeni $\mathbb{R}[x]_{13}$ wielomianów stopnia co najwyżej 13 z bazą $(1, x, x^2, \ldots, x^{13})$ dany jest zbiór:

$$A = \{p \in \mathbb{R}[x]_{13} \colon p(1) = p''(0) = 0\}$$

(a) Wykaż, że $A$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}[x]_{13}$.

(b) Wyznacz bazę podprzestrzeni $A$ i podaj wymiar $A$.