Kolokwium 2

Algebra liniowa

15 stycznia 2019

Zadanie 1 (10p)**.** Zbadaj wzajemne położenie prostych

$$l_1\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad l_2\colon \begin{cases} x = 3 \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Jeżeli leżą one na jednej płaszczyźnie, to napisz jej równanie ogólne. Jeżeli nie, to oblicz odległość między tymi prostymi.

Zadanie 2 (10p+5p)**.** Dane jest odwzorowanie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ określone jako: $f(x, y, z) = (px + y + 2z, x + py + 2z, x + y + 2pz)$, gdzie p jest parametrem rzeczywistym, oraz baza $B = ((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$.

(a) Wyznacz wymiary jądra oraz obrazu odwzorowania f w zależności od parametru p.

(b) Dla $p = 2$, znajdź macierz $M_f(B)$ odwzorowania f w bazie B.

Zadanie 3 (15p)**.** Niech $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ będzie odwzorowaniem liniowym, którego macierz w bazie $B = (e_1, e_2, e_3)$ jest równa

$$A = M_f(B) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

gdzie $e_1 = 1 + x$, $e_2 = x + x^2$, $e_3 = 1 + x^2$. Sprawdź, że odwzorowanie jest diagonalizowalne. Wskaż bazę B' taką, że macierz $M_f(B')$ odwzorowania f w tej bazie jest macierzą diagonalną oraz podaj tę macierz.

Zadanie 4 (10p)**.** Niech $f\colon U \to V$ będzie odwzorowaniem liniowym, a B bazą w U. Udowodnij, że: f jest surjekcją $\iff$ $f(B)$ jest zbiorem generującym V.