Kolokwium 1

Algebra liniowa

25 listopada 2019

Zadanie 1 (10p)**.** Wykorzystując odpowiednią postać liczby zespolonej oraz adekwatne twierdzenia, znajdź wszystkie rozwiązania następujących równań w ciele liczb zespolonych. Odpowiedzi podaj w postaci algebraicznej.

(a) $i(\overline{z})^4 z^2 = -4|z|^2$,

(b) $z^6 - 2z^5 + 9z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 8z + 20 = 0$, wiedząc że $z_0 = i\sqrt{2}$ jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu:

$w(z) = z^6 - 2z^5 + 9z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 8z + 20.$

Zadanie 2 (10p)**.** Czy poniższe zdania są prawdziwe? Udowodnij lub podaj kontrprzykład.

(a) Jeśli R jest relacją równoważności, to $R \circ R$ jest relacją równoważności.

(b) Każdy podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma kres dolny względem relacji $\leqslant$.

(c) Jeśli $grR^{-1} \subset grR$, to R jest relacją symetryczną.

Zadanie 3 (15p)**.**

(a) Sprawdzić, czy zbiór $\mathbb{Z}$ tworzy grupę abelową względem działania $\oplus$ określonego wzorem:

$$a \oplus b = (-1)^a b + (-1)^b a.$$

(b) Niech h będzie homomorfizmem grupy $(\mathbb{Z}/10, +)$ w grupę $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$. Jakie są możliwe wartości $h([5])$?

Zadanie 4 (15p)**.** Zbadaj, czy podany zbiór stanowi podprzestrzeń liniową przestrzeni wektorowej V. Jeżeli tak, wyznacz bazę i wymiar tej podprzestrzeni.

(a) $U_1 = \{w \in R[x]\colon \text{stopień } w = 3\}$; $V = R[x]$,

(b) $U_2 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})\colon \forall x \in \mathbb{R} \ \ |f(x)| < 11\}$; $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(c) $U_3 = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4\colon z_1 = iz_4 \wedge iz_1 + 2z_2 - z_3 = 0\}$; $V = \mathbb{C}^4(\mathbb{C})$

(d) $U_4 = W_1 \cup W_2$, gdzie $W_1 = \mathrm{Lin}\{(1, 1, 0)\}$, $W_2 = \mathrm{Lin}\{(1, 0, 1)\}$; $V = \mathbb{R}^3$