Kolokwium 2

Algebra liniowa

20 stycznia 2020

Zadanie 1 (10p)**.** Znajdź punkt przecięcia się prostych:

$$l_1\colon \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 5+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad l_2\colon \begin{cases} x = -2t \\ y = 2+t \\ z = 5-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

oraz sinus kąta pomiędzy ich wektorami kierunkowymi.

Wyznacz punkt symetryczny do punktu $A = (0, 5, 4)$ względem płaszczyzny $\pi\colon x - 2y + z = 0$.

Zadanie 2 (13p)**.** Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} (p-1)x & +py & +z & = & 0 \\ px & +(p-1)y & +pz & = & 1 \\ x & +py & +(p-1)z & = & p \\ & y & +pz & = & p-1 \end{cases}$$

Zadanie 3 (15p)**.** Niech $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ będzie odwzorowaniem liniowym, którego macierz w bazie $B = (e_1, e_2, e_3)$ jest równa

$$A = M_f(B) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

gdzie $e_1 = 1+x$, $e_2 = x+x^2$, $e_3 = 1+x^2$. Sprawdź, że odwzorowanie jest diagonalizowalne. Wskaż bazę B' taką, że macierz $M_f(B')$ odwzorowania f w tej bazie jest macierzą diagonalną oraz podaj tę macierz, a następnie oblicz $f^{20}(x^2+3x)$.

Zadanie 4 (12p)**.** Określ prawdziwość każdego z poniższych zdań oraz podaj dowód lub (kontr)przykład.

(a) Jeżeli A jest macierzą diagonalizowalną, to A jest odwracalna.

(b) Jeżeli $f\colon U \to V$ jest odwzorowaniem liniowym oraz $v_1, v_2, v_3 \in U$ są układem liniowo zależnym, to $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ jest układem liniowo zależnym.

(c) Istnieje odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ takie, że $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Lin}\{(1,1,0,0,0), (0,1,1,0,0)\}$.

(d) Istnieje odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ takie, że $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Lin}\{(1,1,0,0,0), (0,1,1,0,0)\}$ oraz macierz odwzorowania f ma rząd 3.