

# Kolokwium 2

Algebra liniowa

15 stycznia 2021

**Zadanie 1** (13p). Dane są punkty  $A = (1, 0, 1)$ ,  $B = (2, -3, 3)$ ,  $C = (-1, 3, 0)$ ,  $D = (4, 0, 1)$ . Sprawdź, czy punkty  $A, B, C, D$  leżą na jednej płaszczyźnie. Jeżeli tak, wyznacz równanie tej płaszczyzny oraz określ wzajemne położenie prostych  $AC$  i  $BD$ . Jeśli nie, to znajdź rzut punktu  $D$  na płaszczyznę wyznaczoną przez punkty  $A, B, C$  oraz rzut prostej  $CD$  na tę płaszczyznę.

**Zadanie 2** (12p). W zależności od parametru  $p \in \mathbb{R}$  określ wymiar oraz bazę podprzestrzeni  $U$  przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ :

$$U = \text{Lin}\{(p, 2, p-1), (2, 3+p, 1-p), (-1, -2, p-1)\}.$$

Dla jakich wartości parametru  $p$  istnieje izomorfizm  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ?

**Zadanie 3** (14p). Niech  $f: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$  będzie odwzorowaniem liniowym, którego macierz w bazie  $B = (e_1, e_2, e_3)$  jest równa

$$A = M_f(B) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

gdzie  $e_1(x) = 1-x$ ,  $e_2(x) = x-x^2$ ,  $e_3(x) = 1+x^2$ . Sprawdź, że odwzorowanie jest diagonalizowalne. Wskaż bazę  $B'$  taką, że macierz  $D = M_f(B')$  odwzorowania  $f$  w tej bazie jest macierzą diagonalną oraz podaj tę macierz, a także macierz  $P$  taką, że  $A = PDP^{-1}$ .

**Zadanie 4** (11p). Określ prawdziwość każdego z poniższych zdań oraz podaj dowód lub (kontr)przykład.

- Każda macierz kwadratowa jest macierzą przejścia z pewnej bazy do drugiej (niekoniecznie różnej).
- Jeżeli  $f, g: U \rightarrow V$  są odwzorowaniami liniowymi, to  $f + g$  jest odwzorowaniem liniowym.
- Istnieje odwzorowanie liniowe  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  takie, że  $f$  jest epimorfizmem.
- Istnieje odwzorowanie liniowe  $f: \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$  takie, że  $\dim \text{Ker } f \geq 2$  oraz  $\text{Im } f \subseteq \text{Lin}\{x+1, x^2+1\}$ .