Kolokwium 1a

Algebra

3 grudnia 2021

Zadanie 1 (4p+6p)**.** Wykorzystując odpowiednią postać liczby zespolonej oraz adekwatne twierdzenia, znajdź wszystkie rozwiązania następujących równań w ciele liczb zespolonych.

(a) $z^3|z| = (1-\sqrt{3}i)\overline{z}$

(b) $z^5 - 3z^4 + 13z^3 - 29z^2 + 36z - 18 = 0$, wiedząc że $z_0 = 1 + i$ jest pierwiastkiem wielomianu: $w(z) = z^5 - 3z^4 + 13z^3 - 29z^2 + 36z - 18$.

Zadanie 2 (5p+4p)**.** Niech $X = \{1, 2, \dots, n\}$. W zbiorze 2^X wszystkich podzbiorów zbioru X określamy relację $R = (2^X, \mathrm{gr}R, 2^X)$ jako: $ARB \iff$ najmniejszy element zbioru A jest taki sam jak najmniejszy element zbioru B.

(a) Czy R jest relacją porządku czy równoważności? Udowodnij.

(b) Jeżeli R jest relacją porządku, to dla $n = 10$ wskaż kresy rodziny $\{\{3, 4, 6\}, \{10\}, \{3, 5\}\}$. Jeżeli R jest relacją równoważności, to dla $n = 8$ wyznacz jej zbiór ilorazowy.

Zadanie 3 (11p+3p)**.** W zbiorze $E = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ określamy działanie $\star$ w następujący sposób: $(a_1, b_1) \star (a_2, b_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1)$.

(a) Udowodnij, że $(E, \star)$ jest grupą nieprzemienną.

(b) Niech $f : E \to \mathbb{R}_+$ będzie odwzorowaniem takim, że: $f(a, b) = a$. Sprawdź, czy f jest homomorfizmem grup $(E, \star)$ oraz $(\mathbb{R}_+, \cdot)$.

Zadanie 4 (17p)**.** Zbadaj, czy podany zbiór stanowi podprzestrzeń liniową przestrzeni wektorowej V. Jeżeli tak, wyznacz bazę i wymiar tej podprzestrzeni.

(a) $U_1 = \{p \in R[x]_2 \colon p'(1) + 2p(0) = p(2)\}$; $V = R[x]_2$,

(b) $U_2 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ nie jest iniekcją}\}$; $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(c) $U_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2^2 - x_4 = 3x_3\}$; $V = \mathbb{R}^4$

(d) $U_4 = \{z \in \mathbb{C} \colon \frac{\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{3\pi}{4}\}$; $V = \mathbb{C}(\mathbb{R})$