Kolokwium 2a

Algebra

21 stycznia 2022

Zadanie 1 (12p). Dane są punkty $A = (3, 1, -1)$, $B = (1, 3, -3)$, $C = (4, 1, 0)$, $D = (0, 3, -2)$. Wyznacz równanie prostej l przechodzącej przez punkty A i B oraz prostej k przechodzącej przez punkty C i D. Zbadaj wzajemne położenie tych prostych. Wyznacz równanie ogólne płaszczyzny π, która zawiera prostą l i przechodzi przez punkt C.

Zadanie 2 (11p). Wyznacz liczbę rozwiązań układu równań w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} px & +(3+p)y & +(3+p)z & = & 2 \\ & (1-p)y & +z & = & -2 \\ & y & +(1-p)z & = & p \\ & py & -pz & = & -4 \end{cases}$$

Zadanie 3 (13p). Zbadaj, czy istnieje odwzorowanie liniowe spełniające podane warunki. Jeżeli tak, podaj jego wzór.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(1, 1, 0) = (0, 2)$, $f(1, 0, 1) = (2, 1)$, $f(1, 1, 1) = (1, 3)$.

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(3, 2, 1) = (3, 1)$, $g(4, 1, 5) = (7, 2)$, $g(7, 8, -5) = (1, 3)$.

Zadanie 4 (14p). Niech $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_1$ będzie odwzorowaniem liniowym, którego macierz w bazach kanonicznych (tj. $(1, x, x^2, \dots)$) jest równa:

$$A = M_f(B_k, B_k) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

(a) Wyznacz macierz tego odwzorowania w bazach $B_1 = (9x - 2, 5x^2 + 4, 2x^2 + 7x)$ oraz $B_2 = (4x + 1, 7x + 2)$. Wykorzystując tę macierz, oblicz $f(p)$ dla $p(x) = 5x^2 + 9x + 2$.

(b) Określ wymiary jądra i obrazu odwzorowania f. Podaj $\operatorname{Im} f$.