Fizyka Techniczna, Matematyka II, Zestaw 10
Całki wielokrotne i ich zastosowania

1. Oblicz następujące całki:

   (a) $\displaystyle\int_0^2 \int_{-4}^0 (2x^2 + 3xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

   (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_1^2 2xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

   (c) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^1 \int_0^1 \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^2 x^2 y \cos(xy^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

   (e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^1 \int_2^3 (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$,

   (f) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_1^2 xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

2. Zmień kolejność całkowania

   (a) $\displaystyle\int_1^e \left(\int_{\ln y}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$,

   (b) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$,

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$,

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$.

3. Zmień kolejność całkowania, a następnie oblicz całki:

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^2 \left(\int_{-\frac{1}{2}x}^1 (3x+y^2)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$,

   (b) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^{-\frac{1}{2}x+1} (x^2+y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$.

4. Oblicz całkę podwójną po obszarze D ograniczonym podanymi krzywymi:

   (a) $\displaystyle\iint_D (2x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $y=-1$, $y=-x^2$,

   (b) $\displaystyle\iint_D (8x+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $y=x^2-3$, $y+1=x$,

   (c) $\displaystyle\iint_D 4y^2\sin(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $x=0$, $y=\sqrt{\pi}$, $y=\frac{x}{2}$,

   (d) $\displaystyle\iint_D y^2 e^{-\frac{xy}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $x=0$, $y=1$, $y=\frac{x}{2}$,

   (e) $\displaystyle\iint_D (x^3y+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $y=\sqrt{9-x^2}$, $y=|x|$,

   (f) $\displaystyle\iint_D x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $y=0$, $y=\cos x$ dla $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

5. Oblicz całkę podwójną po obszarze D:

   (a) $\iint_D (1+x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $A=(-4,0)$, $B=(0,2)$, $C=(2,0)$,

   (b) $\iint_D \ln x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $A=(1,0)$, $B=(3,0)$, $C=(2,1)$,

   (c) $\iint_D |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, gdzie $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\le \sin\frac{x}{2}, y\ge \frac{x}{\pi}, x>0\}$,

   (d) $\iint_D \sin(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, gdzie $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\le 1, y-x\ge -1, x\ge 0\}$,

   (e) $\iint_D \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, gdzie $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y-\frac{\pi}{4}|\le\frac{\pi}{4}\}$,

   (f) $\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}}$, gdzie D jest kołem o promieniu a stycznym do osi współrzędnych leżącym w pierwszej ćwiartce,

   (g) $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, gdzie D jest kołem o promieniu R i środku $(0,0)$.

6. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

   (a) $y^2=10x+25$, $y^2=-6x+9$,

   (b) $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=x$, $y=0$,

   (c) $x^2=ay$, $x^2=by$, $y^2=\alpha x$, $y^2=\beta x$, $(0<a<b, 0<\alpha<\beta)$.

7. Oblicz przy pomocy całki pojedynczej oraz podwójnej pole obszaru ograniczonego krzywymi $r=a(1+\cos\varphi)$ oraz $r=a\cos\varphi$, $(a>0)$.

8. Oblicz pole asteroidy danej równaniem $|x|^{2/3}+|y|^{2/3}=a^{2/3}$ wprowadzając nowe zmienne $x=r\cos^3 t$, $y=r\sin^3 t$.

9. Oblicz całkę potrójną po bryle V:

   (a) $\iiint_V x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, gdzie V jest walcem $x^2+z^2\le 8$, $0\le y\le 2$,

   (b) $\iiint_V (2(x^2+y^2)+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, gdzie V jest półkulą $x^2+y^2+z^2\le 4$ leżącą w górnej półprzestrzeni $(z\ge 0)$,

   (c) $\iiint_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, gdzie $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2\le x^2+y^2+z^2\le 3\}$,

   (d) $\iiint_V \left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, gdzie V jest bryłą ograniczoną powierzchniami $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, $z=0$, $z=x+2y+5$,

   (e) $\iiint_G \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, gdzie G jest bryłą ograniczoną powierzchniami $z=x^2+y^2$ oraz $z=4$.

10. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami

    (a) $x^2+y^2=1$, $z^2=2-x^2-y^2$ oraz $z=0$,

    (b) $x^2+y^2-2z=0$ oraz $y+z-4=0$,

(c) $x^2 + y^2 = a^2$ oraz $y^2 + z^2 = a^2$,

(d) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 0$, $x = 1$, $z = 0$,

(e) $z = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16}$ oraz $z = 2 - \sqrt{\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16}}$.

11. Oblicz masę bryły ograniczonej paraboloidą $2az \geq x^2+y^2$ oraz sferą $x^2+y^2+z^2 \leq 3a^2$, gdzie gęstość w każdym punkcie jest dana wzorem $\rho(x, y, z) = (x + y + z)^2$.

12. Oblicz masę bryły $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \leq 3 - x^2 - y^2\}$, jeżeli gęstość w każdym punkcie jest równa kwadratowi odległości od osi z.

13. Oblicz masę bryły $E = \{(x, y, z) : x^2+y^2+z^2 \leq R^2, x \geq 0\}$, jeżeli R jest ustaloną liczbą dodatnią, a gęstość w każdym punkcie jest równa kwadratowi odległości tego punktu od płaszczyzny Oxy.

14. Oblicz masę bryły $F = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$, jeżeli gęstość w każdym punkcie (x, y, z) jest równa $\rho(x, y, z) = |xyz^2|$.

15. Oblicz pola następujących powierzchni:

    (a) części $3x + 4y + 6z = 12$ leżącej nad prostokątem o następujących wierzchołkach $(0, 0), (2, 0), (2, 1), (0, 1)$,

    (b) części $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ leżącej nad trójkątem o wierzchołkach $(0, 0), (5, 0), (5, 3)$,

    (c) części płaszczyzny $2x+4y-z+10 = 0$ leżącej między $y = x^2$ oraz $y-x = 2$,

    (d) części sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ leżącej na zewnątrz walca $x^2 + y^2 = 16$,

    (e) części powierzchni $2z = xy$, zawartej wewnątrz walca $x^2 + y^2 = 4$.

16. Znajdź pole płata powierzchniowego wyciętego

    (a) walcem $x^2 + y^2 = R^2$ z paraboloidy hiperbolicznej $z = xy$,

    (b) walcem $x^2 + y^2 = Rx$ ze sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,

    (c) walcem $(x^2 + y^2)^2 = R^2(x^2 - y^2)$ ze sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

17. Oblicz objętość, masę oraz środek ciężkości bryły ograniczonej powierzchniami $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ oraz $z = 2 - \sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}}$, jeżeli gęstość w każdym punkcie (x, y, z) jest równa współrzędnej z.

18. Oblicz środek ciężkości

    (a) obszaru płaskiego ograniczonego krzywymi $y^2 = 4x + 4$ oraz $y^2 = -2x + 4$,

    (b) bryły ograniczonej paraboloidą $y^2 + 2z^2 = 4x$ i płaszczyzną $x = 2$,

    (c) półkuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ $x \geq 0$, gdzie gęstość jest wprost proporcjonalna do odległości od początku układu współrzędnych.

19. Oblicz masę całkowitą oraz środek ciężkości bryły ograniczonej częścią sfery $x^2 + y^2 + z^2 \leq c^2$ leżącej w pierwszym oktancie, płaszczyznami Oxz, Oyz oraz płaszczyzną $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $(a \leq c, b \leq c)$, jeżeli gęstość w każdym punkcie (x, y, z) jest równa współrzędnej z.

20. Wyznacz środek ciężkości bryły ograniczonej powierzchniami $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, $y = 2$, której gęstość wynosi $\rho(x, y, z) = 4 - y$.

21. Znajdź masę bryły leżącej między kocentrycznymi sferami o promieniu 1 i 2 jeżeli gęstość w każdym punkcie jest wprost proporcjonalna do kwadratu odległości od środka sfer. To samo dla gęstości proporcjonalnej do odległości od środka sfer.

22. Sześciokąt foremny o boku a obraca się dookoła jednego z boków. Oblicz objętość bryły powstałej przy tym obrocie. Zastosuj twierdzenie Guldina.

23. Znajdź pole powierzchni torusa o parametrach r i R. Zastosuj twierdzenie Guldina.

24. Oblicz objętość bryły powstałej poprzez obrót dookoła osi Ox powierzchni ograniczonej krzywymi $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$ oraz $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$. Zastosuj twierdzenie Guldina.

Zadania z egzaminów 2017

25. Naszkicuj bryłę $B = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9, z^2 \leqslant x^2 + y^2\}$. Oblicz masę bryły B, jeżeli gęstość w punkcie (x,y,z) jest równa kwadratowi odległości od osi Oz.

26. Oblicz moment bezwładności względem osi Oz bryły

$$B = \{(x,y,z) : 1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$$

(naszkicuj tę bryłę) o gęstości równej odległości danego punktu od osi Oz.

27. Oblicz masę oraz moment statyczny względem płaszczyzny Oxy dla bryły $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}\}$, jeżeli gęstość w punkcie (x,y,z) wynosi $\rho(x,y,z) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2+z^2}$.