Fizyka Techniczna, Matematyka II, Zestaw 13
Całki powierzchniowe

Całka niezorientowana

1. Obliczyć $\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$, gdzie S jest sferą $x^2+y^2+z^2=a^2$.
2. Obliczyć całkę $\iint_S (x+y+2z)\mathrm{d}S$, jeżeli S jest częścią płaszczyzny $x+y+z=3$, $x,y,z\geq 0$.
3. Obliczyć całkę $\iint_S (2x+\frac{4}{3}y+z)\mathrm{d}S$, jeżeli S jest częścią płaszczyzny $6x+4y+3z=12$, $x,y,z\geq 0$.
4. Obliczyć całkę $\iint_S (x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)\mathrm{d}S$, jeżeli S jest częścią powierzchni stożka $z=k\sqrt{x^2+y^2}$ wyciętą walcem $x^2+y^2-2x=0$.
5. Obliczyć całkę $\iint_S y\mathrm{d}S$, gdzie S jest częścią paraboloidy $x^2+z^2=2y$ odciętą stożkiem $x^2+z^2=y^2$.
6. Obliczyć całkę $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S$, jeżeli S jest boczną powierzchnią stożka $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$, dla $0\leq z\leq b$.
7. Obliczyć całkę $\iint_S (x-3z)\mathrm{d}S$, jeżeli S jest trójkątem o wierzchołkach $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,1)$, $C=(0,0,1)$.
8. Obliczyć $\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}S$, gdzie S jest powierzchnią sześcianu $0\leq x,y,z\leq 1$.
9. Obliczyć masę części płaszczyzny $x+y+z=1$, $x,y,z\geq 0$, jeżeli jej gęstość powierzchniowa to $f(x,y,z)=xyz$.
10. Obliczyć masę powierzchni kuli o promieniu R, której gęstość powierzchniowa w każdym punkcie równa się odległości tego punktu od ustalonej średnicy kuli.
11. Obliczyć masę powierzchni kuli o promieniu R, której gęstość powierzchniowa w każdym punkcie równa się kwadratowi odległości tego punktu od ustalonej średnicy kuli.

Całka zorientowana

12. Obliczyć strumień pola $\vec{F}=(x^2,y^2,z^2)$ przez część powierzchni kuli $x^2+y^2+z^2=1$, $x,y,z\geq 0$.
13. Obliczyć strumień pola $\vec{F}=(x,y,2z)$ przez zewnętrzną stronę boczną powierzchni stożka $x^2+y^2=z^2$ między płaszczyznami $z=0$ i $z=4$.
14. Obliczyć strumień pola $\vec{F}=(x,y,z)$ przez powierzchnię boczną stożka $x^2+y^2=z^2$, $0\leq z\leq h$.
15. Obliczyć strumień pola $\vec{F}=(x,y,z)$ przez górną stronę podstawy stożka $x^2+y^2=z^2$, $0\leq z\leq h$.
16. Korzystając ze wzoru Gaussa-Ostrogradskiego obliczyć strumień pola $\vec{F}=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$ przez powierzchnię zamkniętą utworzoną z powierzchni $x^2+y^2=1-z$ oraz $z=0$.

17. Obliczyć, wykorzystując wzór Stokesa, cyrkulację $\int_K y\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$ wzdłuż krzywej zamkniętej K ograniczającej część powierzchni paraboloidy obrotowej $y = x^2 + z^2$ dla $0 \le y \le 4$, $x, z \ge 0$ i obieganej w kierunku dodatnim.

18. Obliczyć $\int_K y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z$, gdzie K jest krzywą zamkniętą ograniczającą trójkąt ABC o wierzchołkach $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, a, 0)$, $C = (0, 0, a)$ (obieganą w kierunku dodatnim).

19. Obliczyć cyrkulację pola $\vec{F} = (x^2y^3, 1, z)$ wzdłuż okręgu $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$.

20. Obliczyć cyrkulację pola $\vec{F} = (-y, x, 3)$ wzdłuż okręgu $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

21. Korzystając ze wzoru Stokesa obliczyć cyrkulację pola:

    a) $\vec{F} = (y, 0, x)$ wzdłuż brzegu częśći powierzchni stożkowej $x = r\cos\varphi$, $y = 4r$, $z = r\sin\varphi$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$,

    b) $\vec{F} = (2y^2, 3x, y + z)$ wzdłuż brzegu części sfery o promieniu 2 leżącej w pierwszym oktancie, obieganego w kierunku dodatnim względem zewnętrznej strony sfery.

22. Korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego obliczyć całkę:

$$\iint_S \left(\frac{1}{3}x^3z + xy^2z + \sin y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x^2z + y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

gdzie powierzchnia S: $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \le z \le 1$ jest boczną powierzchnią walca zorientowaną do wewnątrz.

23. Korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego obliczyć całkę:

$$\iint_S (xz + \sin y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{y^2z}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

gdzie powierzchnia S: $x^2 + \frac{y^2}{4} = z^2$, $0 \le z \le 1$ jest boczną powierzchnią stożka zorientowaną na zewnątrz.