# Fizyka Techniczna, Matematyka II, Zestaw 6
# Pochodna kierunkowa, różniczka zupełna, funkcja uwikłana

1. Policz gradient następujących funkcji

   (a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^n(x_2^n + x_3^n)$,
   (b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,
   (c) $f(x, y, z) = e^{xyz}$,
   (d) $f(x, y, z) = \sin(xy) + xye^z$.

2. Znajdź wielkość i kierunek $\operatorname{grad} u$ w punkcie $(2, -2, 1)$ dla $u = x^2 + y^2 + z^2$.

3. Załóżmy, że temperatura $T$ w ciele jest opisana wzorem $T(x, y, z) = 100 + xyz$. W którym kierunku w punkcie (1,1,1), temperatura rośnie najszybciej?

4. Wyznacz pochodną funkcji $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ w punkcie $M = (1, 2)$ w kierunku od tego punktu do punktu $N = (4, 6)$.

5. Wyznacz pochodną funkcji $u = xy + yz + zx$ w punkcie $M = (2, 1, 3)$ w kierunku od tego punktu do punktu $N = (5, 5, 15)$.

6. Znajdź pochodną kierunkową funkcji $f(x, y) = \sin x \cos y$ w punkcie $(\pi/2, -2\pi/3)$ w kierunku wektora $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$.

7. Wyznacz pochodną kierunkową funkcji $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} + \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, w punkcie $M = (1, 2)$ w kierunku do punktu $N = (3, -4)$.

8. Oblicz pochodną kierunkową funkcji $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ w punkcie $A = (1, 2, \ldots, n)$ w kierunku wektora $\mathbf{v} = (1, 1, \ldots, 1)$.

9. * Pokaż, że pochodna funkcji $z = y^2/x$ w dowolnym punkcie elipsy $2x^2 + y^2 = C^2$ policzona wzdłuż wektora normalnego do tej elipsy równa się zeru.

10. Wyznacz różniczkę zupełną $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$ dla:

    (a) $f(x, y, z) = xyz$,
    (b) $f(x, y, z) = x^2y + y^2x + z^2x$.

11. Oblicz różniczkę zupełną funkcji

    (a) $z = 2x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ dla $x = 3$, $y = 4$, $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = 0,1$,
    (b) $z = \dfrac{6xy}{x^2 - y^2}$ dla $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0,01$, $\Delta y = 0,03$.

12. Oblicz różniczkę zupełną ciśnienia dla gazu doskonałego. Przy jej pomocy oszacuj zmianę ciśnienia jednego mola gazu doskonałego, gdy temperatura zmieni się z $273,15K$ na $274,00K$, objętość zaś z $10,00\ l$ na $9,90\ l$.

13. Napięcie powierzchniowe cieczy możemy wyznaczyć, obserwujkac na jaką wysokość podniesie się ona w rurce włoskowatej (kapilarze). Napięcie powierzchniowe $\gamma$ w szklanej kapilarze jest dane przez $\gamma = \frac{1}{2}\rho g r h$, gdzie $\rho$ jest gęstością wody ($1\text{kg} \cdot \text{dm}^{-3}$), $g$ jest przyspieszeniem ziemskim ($9,81\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$), $r$ jest promieniem kapilary, $h$ zaś jest wysokością, na jaką podnosi się woda. Z jaką dokładnością możemy wyznaczyć $\gamma$, gdy $h = (42 \pm 0,15)$mm, a $r = (0,35 \pm 0,01)$mm?

14. Objętość elipsoidy dana jest wzorem $V = \frac{4}{3}\pi abc$, gdzie $a, b, c$ są długościami półosi elipsoidy. Z jaką dokładnością możemy wyznaczyć $V$, gdy $a = b = 10,00 \pm 0,05$, a $c = 8,00 \pm 0,05$? Oblicz błąd względny.

15. Okres $T$ wahadła jest liczony z zależności $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ gdzie $l$ jest długością wahadła a $g$ jest stałą grawitacji. Wyznacz błąd przy wyznaczaniu $T$, uzyskany jako wynik małych błędów $\Delta l = \alpha$ i $\Delta g = \beta$ przy wyznaczaniu $l$ i $g$.

16. Podaj przybliżoną wartość

    (a) $3,002 \cdot 2,004$,
    (b) $\dfrac{(3,007)^2}{1,004}$
    (c) $(1.02)^3(0.97)^2$,
    (d) $\sqrt{(4.05)^2 + (2.93)^2}$,
    (e) $\dfrac{8.04}{2.02}$.

17. Wyznacz ekstrema funkcji uwikłanej zadanej równaniem

    (a) $x^2 + 2xy - y^2 = -a^2$,
    (b) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$,
    (c) $y^2 - 2yx^2 + 4x - 3 = 0$,
    (d) $x^4 + y^2 - 4xy = 0$,
    (e) $xy^2 - x^2y = 2a^3$,
    (f) $^*$ $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

18. W termodynamice jest wykorzystywana zależność $\dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial x}{\partial z} = -1$, gdzie $x = f(y,z)$, $y = g(x,z)$, $z = h(x,y)$ są funkcjami zdefiniowanymi w sposób uwikłany za pomocą równania $F(x,y,z) = 0$. Zakładamy, że $F$ spełnia założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej. Udowodnij podaną zależność.

19. Oblicz $y'$ uwzględniając, że $y$ jest funkcją $x$, jeżeli:

    (a) $x^2 + y^2 - 2y = 9$,
    (b) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$,
    (c) $x^3 - 2x^2y - 2xy^2 + y^3 = 1$,
    (d) $x^2 + y^2 - 3xy = 0$,
    (e) $e^x \sin y - e^{-y}\cos x = 0$,
    (f) $x - y - \operatorname{arc\,ctg} y = 0$,
    (g) $\cos y - \cos 2y - x^2 \sin y = 0$,
    (h) $x^2 - y^2 - 4x - 6y - 8 = 0$, podaj $y'$ w punkcie $(4, -2)$.

20. Dana jest funkcja $\cos x \cosh y = 1$, dla $0 < x < \frac{1}{2}\pi, y > 0$. Udowodnij, że

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos x}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\cosh y}.$$

    (zadanie z poprzedniego semestru)

21. W którym punkcie elipsy $16x^2 + 9y^2 = 400$ rzędna maleje z taką samą prędkością z jaką rośnie odcięta?