Fizyka Techniczna, Matematyka II, Zestaw 8
Różniczkowanie funkcji złożonych

1. Wyznacz za pomocą reguły łańcuchowej:
   (a) $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ dla $u(x,y) = \cos(x^2 + 2y)$, gdy $x(t) = t$, $y(t) = t^2$,
   (b) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ dla $f(x,y) = e^{-xy}$, gdy $x(t) = \sin t$ i $y(t) = \cos t$,
   (c) $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ dla $u(x,y,z) = x^2 + ze^y$, gdy $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ i $z(t) = t^3$,
   (d) $\frac{\partial u}{\partial s}$ dla $u = e^{(x+y)}$, $x = te^s$ i $y = \sin s$,
   (e) $\frac{\partial u}{\partial s}$ i $\frac{\partial u}{\partial t}$ dla $u(x,y) = ye^{-x} + xy$, gdzie $x(s,t) = s^2 t$, $y(s,t) = e^{-s} + t$,
   (f) $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ dla $u = y \sin x$ oraz $y = xe^{-x}$,
   (g) $\frac{\partial u}{\partial r}$ dla $u(x,y) = x^2 - xy + y^2$, gdzie $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,
   (h) $\frac{\partial z}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial z}{\partial y}$ dla $z = u \ln v$, gdzie $u = 3x - y$ oraz $v = x^2 + y^2$.

2. Wyznacz za pomocą reguły łańcuchowej $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, jeżeli funkcja $z = f(u,v) = 2u^2 - e^v$ oraz $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

3. Równania ruchu punktu materialnego wynoszą:
$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3.$$
   Jaka jest prędkość oddalania się tego punktu od początku układu współrzędnych?

4. Jeden bok prostokąta wynosi $x = 20$ m wydłuża się z prędkością 5 m/s, podczas gdy drugi bok wynoszący $y = 30$ m maleje z prędkością 4 m/s. Jak szybko zmienia się obwód oraz pole tego prostokąta?

5. Pokaż, że funkcja $z = \varphi(x^2 + y^2)$ spełnia równanie
$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

6. Pokaż, że funkcja $z = y\varphi(x^2 - y^2)$ spełnia równanie
$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

7. Przekształć równanie $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = z^2$ wprowadzając nowe zmienne $x = t$, $y = \dfrac{t}{1+tu}$, $z = \dfrac{t}{1+tv}$, gdzie $v = v(t,u)$.

8. Przekształć równanie $z''_{xx} - yz''_{yy} = \frac{1}{2}z'_y$ $(z = f(x,y),\ y > 0)$ przyjmując nowe zmienne $u = x - 2\sqrt{y}$, $v = x + 2\sqrt{y}$ i spróbuj je rozwiązać.