Fizyka Techniczna, Matematyka II, Zestaw 9
Pole wektorowe

1. Niech $f(x, y)$ będzie dowolną funkcją różniczkowalną w $\mathbb{R}^2$. Wyraź gradient funkcji f we współrzędnych biegunowych:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, & r \geq 0 \\ y = r\sin\varphi, & \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases},$$

tj. w zależności od $\frac{\partial f}{\partial r}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$. Oblicz jakobian przekształcenia zmiany zmiennych.

2. Niech $f(x, y, z)$ będzie dowolną funkcją różniczkowalną w $\mathbb{R}^3$. Wyraź laplasjan funkcji f we współrzędnych walcowych:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, & r \geq 0 \\ y = r\cos\varphi, & \varphi \in [0, 2\pi] \\ z = z, & z \in \mathbb{R} \end{cases},$$

tj. w zależności od $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial z}$. Oblicz jakobian przekształcenia zmiany zmiennych.

3. Niech $f(x, y, z)$ będzie dowolną funkcją różniczkowalną w $\mathbb{R}^3$. Wyraź laplasjan funkcji f we współrzędnych sferycznych:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta, & r \geq 0 \\ y = r\cos\varphi\sin\theta, & \varphi \in [0, 2\pi] \\ z = r\sin\varphi, & \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases},$$

tj. w zależności od $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial \theta}$. Oblicz jakobian przekształcenia zmiany zmiennych.

Wskazówka: skorzystaj dwukrotnie z poprzedniego zadania, zmieniając współrzędne dwuetapowo, tj. najpierw podstawiając $x' = r\cos\theta$, $y' = r\sin\theta$, $z' = z$; a następnie $r' = r\cos\varphi$, $\theta' = \theta$, $z'' = z'\sin\varphi$. Zauważ, że oba te przekształcenia, z dokładnością do kolejności zmiennych, są przekształceniem typu współrzędne walcowe.

4. Znajdź, o ile istnieje, potencjał pola wektorowego

   (a) $F = (\pi r^2, 2\pi rh)$,

   (b) $F = (2xy + y^2, x^2 + 2xy)$,

   (c) $F = (2x\sin y, x^2\cos y + e^y)$,

   (d) $F = (ye^y, xe^y)$,

   (e) $F = \left(\frac{1}{x} + 2xye^{x^2}, \frac{1}{y} + e^{x^2}\right)$,

   (f) $F = \left(\frac{y}{1 + x^2y^2} + 2y, \frac{x}{1 + x^2y^2} + 2x\right)$,

   (g) $F = \left(e^{xy}\left(\frac{xy\ln x + 1}{x}\right) + 2x, xe^{xy}\ln x\right)$.

5. Czy jeżeli rotacja pola wektorowego jest równa zero, to pole wektorowe musi być potencjalne?