Zestaw 3

Jakub Kwaśny

Zadanie 1. Udowodnij, że jeżeli $0 < p < 1$ oraz:

$$\binom{n}{k}p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{t}(1-p)^{\binom{t}{2}} < 1,$$

to $R(k,t) > n$.

Zadanie 2. Niech H będzie n-jednorodnym hipergrafem ($n \geqslant 2$) o mniej niż 2^{n-1} krawędziach. Wykaż, że istnieje takie 2-kolorowanie wierzchołków tego hipergrafu, że każda krawędź zawiera wierzchołki w obu kolorach.

Zadanie 3. Turniej $T_n = (V, A)$ ma własność S_k, $k \in [n]$, jeżeli

$$\forall K \in \binom{V}{k} \quad \exists v \in V \setminus K \quad \forall u \in K \colon vu \in A.$$

Udowodnij, że jeśli $\binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k} < 1$, to istnieje turniej T_n o własności S_k.

Zadanie 4. Niech F będzie skończoną rodziną skończonych ciągów binarnych taką, że żaden element F nie jest prefiksem żadnego innego. Udowodnij, że:

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_i \frac{1}{2^i} \leqslant 1,$$

gdzie N_i oznacza liczbę elementów rodziny F długości i.

Zadanie 5. Zbiór $\{(A_i, B_i), 1 \leqslant i \leqslant h\}$ nazywamy (k,l)-systemem ($k, l \in \mathbb{N}$), jeżeli:

- $A_i \cap B_i = \emptyset$, $i \in [h]$,
- $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, $i, j \in [h]$, $i \neq j$,
- $|A_i| = k$, $|B_i| = l$, $i \in [h]$.

Wykaż, że $h \leqslant \binom{k+l}{k}$.