Zestaw 4

Jakub Kwaśny

Zadanie 1. Znajdź wartość oczekiwaną liczby punktów stałych losowej permutacji.

Zadanie 2. Udowodnij, że istnieje turniej T_n o co najmniej $n!2^{1-n}$ ścieżkach Hamiltona.

Zadanie 3. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem rozmiaru $\|G\| = m$ i rzędu $|G| = n$. Wykaż, że G zawiera podgraf dwudzielny o co najmniej $\frac{m}{2}$ krawędziach.

Zadanie 4. Niech $v_1, \ldots, v_n$ będą wektorami jednostkowymi z przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wykaż, że istnieją współczynniki $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ takie, że:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i \right\| \leqslant \sqrt{n}.$$

Zadanie 5. Niech $H = (V, E)$ będzie n-jednorodnym hipergrafem o 4^{n-1} krawędziach ($n \geqslant 2$). Udowodnij, że istnieje takie 4-kolorowanie tego hipergrafu, że żadna krawędź nie jest monochromatyczna.

Zadanie 6. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem rzędu n. Wykaż, że G zawiera zbiór niezależny złożony z przynajmniej $\displaystyle\sum_{v \in V} \frac{1}{\deg(v) + 1}$ wierzchołków.