Zestaw 6

Jakub Kwaśny

1. Funkcje progowe

Zadanie 1. Niech H będzie grafem powstałym z K_4 poprzez dodanie do jednego z wierzchołków wiszącej krawędzi. Definiujemy X jako zmienną losowa w przestrzeni $\mathcal{G}(n,p)$, która jest równa liczbie indukowanych kopii H w grafie $G(n,p)$. Oblicz $\mathbb{E}(X)$.

Zadanie 2. Udowodnij, że funkcja progowa dla własności posiadania cyklu to $t_n = \frac{1}{n}$.
Wskazówka: zauważ, że jeżeli $|E(G)| \geqslant |V(G)$, *to graf ma cykl. Wykorzystaj nierówność Czebyszewa.*

Zadanie 3. Udowodnij, że funkcja progowa dla własności: średnica równa 2, jest równa $t_n = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$.
Wskazówka: zamiast rozważać $p << t$, *przyjmij* $p = c \cdot \sqrt{\frac{\ln n}{n}}$ *gdzie* $c < \sqrt{2}$, *analogicznie w drugą stronę.*

2. Graf Rado

Własność rozszerzania:

$$\forall_{\substack{U,W\subset V(G)\\ U\cap W=\emptyset}} \exists_{v\in V(G)\setminus(U\cup W)} : (U \subset N(u) \land W \cap N(u) = \emptyset) \tag{1}$$

Twierdzenie 1 (bez dowodu)**.** *Niech* G_1, G_2 *- grafy nieskończone, które spełniają* (1)*. Wówczas* $G_1 \cong G_2$.

Zatem istnieje dokładnie jeden graf nieskończony spełniający (1). Nazywamy go grafem Rado i oznaczamy $\mathcal{R}$.

Zadanie 4. Niech $G = (V,E)$, $V = \mathbb{N}$ oraz dla dowolnych $u, v \in V$, $u < v$ określamy niezależnie $P(uv \in E) = \frac{1}{2}$. Udowodnij, że $G \cong \mathcal{R}$ prawie na pewno.

Twierdzenie 2. *Niech* $\mathcal{P}$ *będzie własnością grafów wyrażoną w języku pierwszego rzędu*[1]*. Wówczas asymptotycznie prawie wszystkie grafy mają własność* $\mathcal{P}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathcal{R}$ *ma własność* $\mathcal{P}$.

Zadanie 5. Czy asymptotycznie prawie wszystkie grafy:

(a) mają podgraf indukowany H (dla pewnego, z góry ustalonego H)?

(b) są k-regularne (dla pewnego, z góry ustalonego $k \in \mathbb{N}$)?

(c) są spójne?

(d) mają liczbę chromatyczną równą co najwyżej k (dla pewnego, z góry ustalonego $k \in \mathbb{N}$)?

(e) są samodopełniające się?

[1] To znaczy taką, która używa wyłącznie: nazw wierzchołków, zmiennych należących do zbioru wierzchołków, relacji równości, relacji sąsiedztwa wierzchołków, spójników logicznych, nawiasów i kwantyfikatorów: $\forall x \in V$, $\exists x \in V$.