

Zestaw 2

Jakub Kwaśny

Zadanie 1. Rozwiąż równania, wykorzystując metodę funkcji tworzących.

(a) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = a_1 = 2$,

(b) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $a_0 = 1, a_1 = -1$,

(c) $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$, $D_0 = 1$.

Zadanie 2. Wewnątrz reaktora jądrowego znajdują się dwa rodzaje cząstek: typu α i typu β . W każdej sekundzie cząstka α rozpada się na trzy cząstki typu β , a cząstka typu β na jedną cząstkę α i dwie cząstki β . Jeżeli umieścimy jedną cząstkę α w czasie $t = 0$, to ile będziemy mieli cząstek typu β w chwili $t = 100$?

Zadanie 3. Wyznacz funkcję tworzącą dla liczby a_n całkowitych, nieujemnych rozwiązań równania:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n.$$

Zadanie 4. W pudełku znajdują się 3 kule niebieskie, 3 kule żółte oraz 3 kule zielone. Znajdź funkcję tworzącą dla liczby możliwości wyboru r kul.

Zadanie 5. W hotelu „Hilbert” zatrudniono roztargnionego kelnera. Pewnego dnia ma on każdemu z gości podać śniadanie do pokoju. Niestety każdy z gości zamówił inny posiłek, a sytuację komplikuje fakt, że hotel posiada nieskończenie wiele pokoi.

(a) Poza sezonem zajętych jest tylko n pierwszych pokoi. Oblicz prawdopodobieństwo p_n , że żaden z gości nie dostanie zamówionego przez siebie posiłku.

(b) Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.

Zadanie 6. Ile jest permutacji n -elementowych o dokładnie r punktach stałych?

Zadanie 7. Znajdź wykładniczą funkcję tworzącą k -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego.

Zadanie 8. Na ile sposobów można pokolorować wierzchołki sześciokąta foremnego pięcioma kolorami? Sześciokąt możemy dowolnie obracać na płaszczyźnie.

Zadanie 9. Ile jest różnych naszyjników, zawierających pięć koralików, każdy w jednym z trzech kolorów?

Zadanie 10. Ile jest różnych naszyjników, zawierających pięć koralików, każdy w jednym z trzech kolorów, z czego dokładnie dwa są niebieskie?

Zadanie 11. Ile jest różnych kolorowań witraża (rys. poniżej) kolorami czerwonym, niebieskim i zielonym, w których nie występuje kolor czerwony albo kolor zielony występuje dokładnie raz, jeśli witrażem możemy dowolnie obracać oraz możemy patrzeć na niego z drugiej strony?



Zadanie 12. W urnie znajdują się kule czarne, białe, zielone i niebieskie. Ile różnych ciągów długości n można z nich ułożyć? Nie rozróżniamy, czy dany ciąg oglądany jest od lewej, czy od prawej strony.

Zadanie 13. Na ile sposobów można pokolorować wierzchołki sześcianu dwoma kolorami tak, aby dokładnie trzy wierzchołki były koloru różowego?