Zestaw 4

Jakub Kwaśny

Zadanie 1. Znajdź wartość oczekiwaną liczby punktów stałych losowej permutacji.

Zadanie 2. Udowodnij, że istnieje turniej T_n o co najmniej $n!2^{1-n}$ ścieżkach Hamiltona.

Zadanie 3. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem rozmiaru $\|G\| = m$ i rzędu $|G| = n$. Wykaż, że G zawiera podgraf dwudzielny o co najmniej $\frac{m}{2}$ krawędziach.

Zadanie 4. Niech $v_1, \ldots, v_n$ będą wektorami jednostkowymi z przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wykaż, że istnieją współczynniki $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ takie, że:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i \right\| \leqslant \sqrt{n}.$$

Zadanie 5. Niech $H = (V, E)$ będzie n-jednorodnym hipergrafem o 4^{n-1} krawędziach ($n \geqslant 2$). Udowodnij, że istnieje takie 4-kolorowanie tego hipergrafu, że żadna krawędź nie jest monochromatyczna.

Zadanie 6. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem rzędu n. Wykaż, że G zawiera zbiór niezależny złożony z przynajmniej $\displaystyle\sum_{v \in V} \frac{1}{\deg(v) + 1}$ wierzchołków.

Zadanie 7. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem rzędu n. Dane jest kolorowanie właściwe c grafu G przy użyciu pewnej (nieokreślonej) liczby kolorów, posiadające własność, że każdy wierzchołek ma swoich sąsiadów pokolorowanych na co najwyżej M różnych kolorów. Wykaż, że G zawiera zbiór niezależny złożony z przynajmniej $\frac{n}{M+1}$ wierzchołków.

Zadanie 8. Monika i Rafał grają w grę na planszy z pozycjami o etykietach $\{0, 1, \ldots k\}$. Początkowo wszystkie n żetonów znajduje się na pozycji k. Gra toczy się przez r rund, a każda runda ma następujący przebieg: Rafał wskazuje pewien podzbiór S żetonów na planszy, a następnie Monika albo przesuwa wszystkie żetony ze zbioru S jedną pozycję w lewo, albo przesuwa wszystkie żetony ze zbioru S^c jedną pozycję w lewo. Każdy żeton przesunięty w lewo z pozycji 0 zostaje usunięty z planszy. Jeśli po zakończeniu gry na planszy pozostanie 1 lub 0 żetonów, gra kończy się zwycięstwem Rafała, w przeciwnym przypadku wygrywa Monika. Udowodnij, że jeśli $n \cdot \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{r}{i} 2^{-r} > 1$, to Monika ma strategię wygrywającą.

Wskazówka: skorzystaj z twierdzenia Zermela.

Twierdzenie 1 (Zermelo [1])**.** *Dla dowolnej skończonej, nielosowej gry dwuosobowej o doskonałej informacji, w której gracze wykonują ruchy na przemian i która nie może zakończyć się remisem, jeden z graczy ma strategię wygrywającą.*

[1] E. Zermelo, *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*, 1913.