Zestaw 5

Jakub Kwaśny

Zadanie 1. Niech $H = (V, E)$ będzie hipergrafem, w którym każda krawędź zawiera przynajmniej k wierzchołków i każda krawędź przecina co najwyżej d innych. Wykaż, że jeżeli $e(d+1) \leqslant 2^{k-1}$, to istnieje takie dwukolorowanie wierzchołków hipergrafu H, że każda krawędź zawiera wierzchołki obu kolorów.

Zadanie 2. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem o stopniu maksymalnym Δ i niech $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$ będzie podziałem V na r rozłącznych podzbiorów, gdzie $|V_i| \geqslant 2e\Delta$, $i = 1, \ldots, r$. Udowodnij, że istnieje zbiór niezależny $W \subset V$, spełniający $|W \cap V_i| \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, r$.

Zadanie 3. Niech N, M będą skończonymi zbiorami takimi, że $|N| = n$, $|M| = m$. Za pomocą LLL pokaż, że jeżeli $n > 6m$, to istnieje iniekcja $f \colon M \to N$.

Zadanie 4. Niech $\phi = \bigwedge_{i=1}^{m} C_j$ będzie formułą logiczną w koniunkcyjnej postaci normalnej (CNF) i niech $k = \min\{|C_j|, C_j \in \phi\}$. Pokaż, że jeżeli każdą klauzulę C_j przecina co najwyżej $2^k/e - 1$ innych klauzul, to ϕ jest spełnialna.

Zadanie 5. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $n \times n$ o elementach całkowitych. Permutację $\sigma \colon [n] \to [n]$ nazywamy łacińską transwersalą macierzy A, jeżeli elementy $a_{i\sigma(i)}$, $i \in [n]$ są parami różne. Pokaż, że jeżeli każda liczba całkowita występuje w macierzy A co najwyżej $\frac{n-1}{4e}$ razy, to A zawiera transwersalę łacińską.

Zadanie 6. Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym grafem prostym o maksymalnym stopniu Δ. Niech $c \colon V \to \mathbb{F}_2^k$ oraz

$$f(v) = \sum_{u \in N(v)} c(u).$$

Wykaż, że jeżeli $k \geqslant 2\log_2 \Delta + 3$, to istnieje taka funkcja c, dla której wszystkie wartości funkcji f są niezerowe.

Zadanie 7. Wykaż, że jeżeli każde k-kolorowanie zbioru $X^m \subset \mathbb{N}^m$ zawiera monochromatyczny podzbiór $S_1 \times \cdots \times S_m$, gdzie $S_i \in \binom{X}{2}$, to

$$|X| \geqslant \frac{k^{(2^m-1)/m}}{6}.$$

Zadanie 8. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym i niech z każdym z wierzchołków $v \in V$ związany będzie zbiór $S(v)$ złożony z co najmniej $10d$ kolorów. Załóżmy ponadto, że $\forall v \in V \forall c \in S(v)$: v ma co najwyżej d sąsiadów u takich, że $c \in S(u)$. Udowodnij, że istnieje kolorowanie właściwe wierzchołków grafu G z list.