Zestaw 6

Jakub Kwaśny

Zadanie 1. Udowodnij, że funkcja progowa dla własności posiadania cyklu to $t_n = \frac{1}{n}$.
Wskazówka: zauważ, że jeżeli $|E(G)| \geqslant |V(G)|$, *to graf ma cykl. Wykorzystaj nierówność Czebyszewa.*

Zadanie 2. Udowodnij, że funkcja progowa dla własności: średnica równa 2, jest równa $t_n = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$.

Wskazówka: zamiast rozważać $p << t$, *przyjmij* $p = c \cdot \sqrt{\frac{\ln n}{n}}$ *gdzie* $c < \sqrt{2}$, *analogicznie w drugą stronę.*

Zadanie 3. Niech H będzie grafem powstałym z K_4 poprzez dodanie do jednego z wierzchołków wiszącej krawędzi.

(a) Czy H jest grafem wyważonym?

(b) Definiujemy X jako zmienną losowa w przestrzeni $\mathcal{G}(n,p)$, która jest równa liczbie (niekoniecznie indukowanych) kopii H w grafie $G(n,p)$. Oblicz $\mathbb{E}(X)$.

Zadanie 4. Niech H będzie grafem, który nie jest wyważony, $k = |H|$, $l = \|H\|$. Udowodnij, że $t = n^{-k/l}$ nie jest funkcją progową własności zawierania podgrafu izomorficznego z H.

Zadanie 5. Wykaż, że wartość oczekiwana liczby składowych spójnych rzędu k w $G(n,p)$ jest równa co najwyżej $\binom{n}{k}k^{k-2}p^{k-1}(1-p)^{kn-k^2}$.

Zadanie 6. Rozważmy przestrzeń $\mathcal{G}(n,p)$, gdzie $p = c\frac{\ln n}{n}$. Korzystając z zadania 5, wykaż że jeśli $c > 1/2$ to prawdopodobieństwo, że graf $G(n,p)$ ma jedną olbrzymią składową (złożoną z ponad połowy wierzchołków), a wszystkie pozostałe wierzchołki są izolowane, zmierza do 1 (przy $n \to \infty$).