

Zestaw 7

Jakub Kwaśny

Własność rozszerzania:

$$\forall_{\substack{U, W \subset V(G) \\ U \cap W = \emptyset \\ |U|, |W| < \infty}} \exists_{v \in V(G) \setminus (U \cup W)} : (U \subset N(v) \wedge W \cap N(v) = \emptyset) \quad (1)$$

Twierdzenie 1 (bez dowodu). Niech G_1, G_2 - grafy nieskończone, przeliczalne, które spełniają (1). Wówczas $G_1 \cong G_2$.

Zatem istnieje dokładnie jeden nieskończony graf przeliczalny spełniający (1). Nazywamy go grafem Rado i oznaczamy \mathcal{R} .

Zadanie 1. Niech $G = (V, E)$, $V = \mathbb{N}$ oraz dla dowolnych $u, v \in V$, $u < v$ określamy niezależnie $P(uv \in E) = \frac{1}{2}$. Udowodnij, że $G \cong \mathcal{R}$ prawie na pewno.

Twierdzenie 2. Niech \mathcal{P} będzie własnością grafów wyrażoną w języku pierwszego rzędu¹. Wówczas asymptotycznie prawie wszystkie grafy mają własność \mathcal{P} wtedy i tylko wtedy, gdy \mathcal{R} ma własność \mathcal{P} .

Zadanie 2. Czy asymptotycznie prawie wszystkie grafy:

- (a) mają podgraf indukowany H (dla pewnego, z góry ustalonego H)?
- (b) są k -regularne (dla pewnego, z góry ustalonego $k \in \mathbb{N}$)?
- (c) są spójne?
- (d) mają liczbę chromatyczną równą co najwyżej k (dla pewnego, z góry ustalonego $k \in \mathbb{N}$)?
- (e) są samodopełniające się?

¹To znaczy taką, która używa wyłącznie: nazw wierzchołków, zmiennych należących do zbioru wierzchołków, relacji równości, relacji sąsiedztwa wierzchołków, spójników logicznych, nawiasów i kwantyfikatorów: $\forall x \in V, \exists x \in V$.