Zestaw 8

Jakub Kwaśny

Twierdzenie 1 (de Brujin, Erdős, 1951)**.** *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, $k \in \mathbb{N}$. Jeżeli dowolny skończony podgraf grafu G ma liczbę chromatyczną co najwyżej k, to $\chi(G) \leqslant k$.*

Zadanie 1. Udowodnij twierdzenie 1, korzystając z argumentu zwartości.

Twierdzenie 2 (Ramsey)**.** *Niech $G = (V, E)$ będzie przeliczalnym grafem pełnym. Wówczas dowolne 2-kolorowanie krawędzi grafu G zawiera monochromatyczną klikę nieskończonego rzędu.*

Zadanie 2. Udowodnij twierdzenie 2.
Wskazówka: konstrukcyjnie wskaż wierzchołki $v_1, v_2, \ldots$, które stworzą klikę.

Twierdzenie 3 (lemat Königa o nieskończoności)**.** *Niech $V_0, V_1, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem rozłącznych, niepustych, skończonych zbiorów. Niech G będzie dowolnym grafem o zbiorze wierzchołków $\bigcup_i V_i$. Załóżmy, że dowolny wierzchołek $v \in V_n$, $n \geqslant 1$, ma sąsiada w V_{n-1}. Wówczas G zawiera nieskończony promień $v_0 v_1 \ldots$, gdzie $v_n \in V_n$, $n = 0, 1, \ldots$.*

Zadanie 3. Udowodnij twierdzenie 3.

Zadanie 4. Udowodnij twierdzenie 1 dla grafów przeliczalnych, korzystając z twierdzenia 3.

Podział $V = V_1 \cup V_2$ zbioru wierzchołków grafu $G = (V, E)$ nazywamy *nieprzyjaznym*, jeżeli dowolny wierzchołek v ma co najwyżej tyle sąsiadów w swojej składowej, co w przeciwnej.

Hipoteza 4. *Dowolny graf przeliczalny ma nieprzyjazny podział swojego zbioru wierzchołków.*

Zadanie 5. Udowodnij powyższą hipotezę dla grafów lokalnie skończonych[1]. Wykorzystaj twierdzenie 3.

[1] Graf nazywamy lokalnie skończonym, jeżeli stopień każdego wierzchołka jest skończony.