

Zestaw 1

Jakub Kwaśny

Zadanie 1. Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 3 lub 5?

Zadanie 2. Ile jest możliwych tablic rejestracyjnych złożonych z dwóch liter alfabetu łacińskiego (26 znaków), a następnie pięciu znaków - liter lub cyfr?

Zadanie 3. Ile jest różnych permutacji:

- (a) liter słowa MATEMATYKA?
- (b) liter słowa KRAWĘDŹ, które zawierają słowo KRA?
- (c) liter N,U,F,S,I,H,T,A,M, które nie zawierają żadnego ze słów MATH, IS, FUN?

Zadanie 4. Wykorzystując dowody kombinatoryczne, udowodnij następujące równości:

- (a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- (b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
- (c) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$
- (d) $\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}$
- (e) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$
- (f) $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}^2 = n^2 \binom{2n-2}{n-1}$
- (g) $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n$
- (h) $\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} = \binom{m+n+1}{n+1}$

Zadanie 5. Ile jest rozwiązań równania:

- (a) $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 14$, gdzie $x_1, \dots, x_7 \in \mathbb{N}_0$,
- (b) $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 14$, gdzie $x_1, \dots, x_7 \in \mathbb{N}$,
- (c) $x_1 + x_2 + x_3 = 17$, gdzie $x_1, x_3 \geq 3$, $x_2 \geq 1$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$,
- (d) $x_1 + x_2 + x_3 = 17$, gdzie $x_1, x_3 \geq 3$, $1 \leq x_2 \leq 5$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$,
- (e) $x_1 + x_2 + x_3 = 17$, gdzie $x_1, x_2, x_3 \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.