

## Zestaw 2

Jakub Kwaśny

**Zadanie 1.** Rozwiąż równania, wykorzystując metodę funkcji tworzących.

- (a)  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ,  $a_0 = a_1 = 2$ ,
- (b)  $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ ,  $a_0 = 1, a_1 = -1$ ,
- (c)  $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ ,  $D_0 = 1$ .

**Zadanie 2.** Wewnątrz reaktora jądrowego znajdują się dwa rodzaje cząstek: typu  $\alpha$  i typu  $\beta$ . W każdej sekundzie cząstka  $\alpha$  rozpada się na trzy cząstki typu  $\beta$ , a cząstka typu  $\beta$  na jedną cząstkę  $\alpha$  i dwie cząstki  $\beta$ . Jeżeli umieścimy jedną cząstkę  $\alpha$  w czasie  $t = 0$ , to ile będziemy mieli cząstek typu  $\beta$  w chwili  $t = 100$ ?

**Zadanie 3.** Wyznacz funkcję tworzącą dla liczby  $a_n$  całkowitych, nieujemnych rozwiązań równania:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n.$$

**Zadanie 4.** W pudełku znajdują się 3 kule niebieskie, 3 kule żółte oraz 3 kule zielone. Znajdź funkcję tworzącą dla liczby możliwości wyboru  $r$  kul.

**Zadanie 5.** W hotelu „Hilbert” zatrudniono roztargnionego kelnera. Pewnego dnia ma on każdemu z gości podać śniadanie do pokoju. Niestety każdy z gości zamówił inny posiłek, a sytuację komplikuje fakt, że hotel posiada nieskończenie wiele pokoi.

- (a) Poza sezonem zajętych jest tylko  $n$  pierwszych pokoi. Oblicz prawdopodobieństwo  $p_n$ , że żaden z gości nie dostanie zamówionego przez siebie posiłku.
- (b) Oblicz  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ .

**Zadanie 6.** Ile jest permutacji  $n$ -elementowych o dokładnie  $r$  punktach stałych?

**Zadanie 7.** Znajdź wykładniczą funkcję tworzącą  $k$ -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru  $n$ -elementowego.

**Zadanie 8.** Na ile sposobów można pokolorować wierzchołki sześciokąta foremnego pięcioma kolorami? Sześciokąt możemy dowolnie obracać

- (a) na płaszczyźnie.
- (b) w przestrzeni trójwymiarowej.

**Zadanie 9.** Ile jest różnych naszyjników, zawierających pięć koralików, każdy w jednym z trzech kolorów?

**Zadanie 10.** Ile jest różnych naszyjników, zawierających pięć koralików, każdy w jednym z trzech kolorów, z czego dokładnie dwa są niebieskie?

**Zadanie 11.** Ile jest różnych kolorowań 22-koralikowego łańcuszka przy użyciu 4 kolorów tak, aby kolor pierwszy występował dokładnie 11 razy? Łańcuszek możemy dowolnie obracać w przestrzeni dwuwymiarowej.

**Zadanie 12.** Ile jest różnych kolorowań witraża (rys. poniżej) kolorami czerwonym, niebieskim i zielonym, w których nie występuje kolor czerwony albo kolor zielony występuje dokładnie raz, jeśli witrażem możemy dowolnie obracać oraz możemy patrzeć na niego z drugiej strony?



**Zadanie 13.** W urnie znajdują się kule czarne, białe, zielone i niebieskie. Ile różnych ciągów długości  $n$  można z nich ułożyć? Nie rozróżniamy, czy dany ciąg oglądany jest od lewej, czy od prawej strony.

**Zadanie 14.** Na ile sposobów można pokolorować wierzchołki sześcianu dwoma kolorami tak, aby dokładnie trzy wierzchołki były koloru różowego?