

# Zestaw 3

Jakub Kwaśny

**Zadanie 1.** W modelu  $\mathcal{G}(n, p)$  oblicz:

- (a)  $\mathbb{P}(G_{n,p} \cong K_{k,n-k})$ , dla ustalonego  $k \in [n-1]$ ,
- (b)  $\mathbb{P}(G_{n,p}$  jest drzewem),
- (c)  $\mathbb{P}(d_{G_{n,p}}(u, v) = 2)$ , dla ustalonych  $u, v \in V$ .

**Zadanie 2.** Udowodnij, że jeżeli  $0 < p < 1$  oraz:

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{t} (1-p)^{\binom{t}{2}} < 1,$$

to  $R(k, t) > n$ .

**Zadanie 3.** Niech  $H$  będzie  $n$ -jednolitym hipergrafem ( $n \geq 2$ ) o mniej niż  $2^{n-1}$  krawędziach. Wykaż, że istnieje takie 2-kolorowanie wierzchołków tego hipergrafu, że każda krawędź zawiera wierzchołki w obu kolorach.

**Zadanie 4.** Turniej  $T_n = (V, A)$  ma własność  $S_k$ ,  $k \in [n]$ , jeżeli

$$\forall K \in \binom{V}{k} \quad \exists v \in V \setminus K \quad \forall u \in K: vu \in A.$$

Udowodnij, że jeśli  $\binom{n}{k} (1 - 2^{-k})^{n-k} < 1$ , to istnieje turniej  $T_n$  o własności  $S_k$ .

**Zadanie 5.** Niech  $F$  będzie skończoną rodziną skończonych ciągów binarnych taką, że żaden element  $F$  nie jest prefiksem żadnego innego. Udowodnij, że:

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_i \frac{1}{2^i} \leq 1,$$

gdzie  $N_i$  oznacza liczbę elementów rodziny  $F$  długości  $i$ .

**Zadanie 6.** Zbiór  $\{(A_i, B_i), 1 \leq i \leq h\}$  nazywamy  $(k, l)$ -systemem ( $k, l \in \mathbb{N}$ ), jeżeli:

- $A_i \cap B_i = \emptyset$ ,  $i \in [h]$ ,
- $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ ,  $i, j \in [h]$ ,  $i \neq j$ ,
- $|A_i| = k$ ,  $|B_i| = l$ ,  $i \in [h]$ .

Wykaż, że  $h \leq \binom{k+l}{k}$ .

**Zadanie 7.** Niech  $\{(A_i, B_i), 1 \leq i \leq h\}$  będzie rodziną par zbiorów liczb naturalnych, spełniającą:

- $A_i \cap B_i = \emptyset$ ,  $i \in [h]$ ,
- $(A_i \cap B_j) \cup (A_j \cap B_i) \neq \emptyset$ ,  $i, j \in [h]$ ,  $i \neq j$ ,
- $|A_i| + |B_i| = n$ ,  $i \in [h]$ .

Wykaż, że  $h \leq 2^n$ .

**Zadanie 8.** Każdy wyraz macierzy  $A = \{a_{ij}\}$  wymiaru  $100 \times 100$  jest liczbą naturalną ze zbioru  $\{1, 2, \dots, 5000\}$ . Wiadomo dodatkowo, że każda liczba z tego zbioru występuje w macierzy dokładnie dwa razy. Udowodnij, że można wybrać 100 wyrazów macierzy w taki sposób, aby:

- a) z każdego wiersza wybrany został dokładnie jeden element,
- b) z każdej kolumny wybrany został dokładnie jeden element,
- c) wybrane liczby były parami różne.