Zestaw 1

Jakub Kwaśny

Zadanie 1. Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 3 lub 5?

Zadanie 2. Ile jest możliwych tablic rejestracyjnych złożonych z dwóch liter alfabetu łacińskiego (26 znaków), a następnie pięciu znaków - liter lub cyfr?

Zadanie 3. Ile jest różnych permutacji:

(a) liter słowa MATEMATYKA?

(b) liter słowa KRAWĘDŹ, które zawierają słowo KRA?

(c) liter N,U,F,S,I,H,T,A,M, które nie zawierają żadnego ze słów MATH, IS, FUN?

Zadanie 4. Wykorzystując dowody kombinatoryczne, udowodnij następujące równości:

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

(b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(c) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

(d) $\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}$

(e) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

(f) $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}^2 = n^2\binom{2n-2}{n-1}$

(g) $\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k} = 3^n$

(h) $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{m+n+1}{n+1}$

Zadanie 5. Ile jest rozwiązań równania:

(a) $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 14$, gdzie $x_1, \ldots, x_7 \in \mathbb{N}_0$,

(b) $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 14$, gdzie $x_1, \ldots, x_7 \in \mathbb{N}$,

(c) $x_1 + x_2 + x_3 = 17$, gdzie $x_1, x_3 \geqslant 3$, $x_2 \geqslant 1$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$,

(d) $x_1 + x_2 + x_3 = 17$, gdzie $x_1, x_3 \geqslant 3$, $1 \leqslant x_2 \leqslant 5$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$,

(e) $x_1 + x_2 + x_3 = 21$, gdzie $x_1, x_2, x_3 \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.