Zestaw 3

Jakub Kwaśny

Zadanie 1. W modelu $\mathcal{G}(n,p)$ oblicz:

(a) $\mathbb{P}\left(G_{n,p} \cong K_{k,n-k}\right)$, dla ustalonego $k \in [n-1]$,

(b) $\mathbb{P}\left(G_{n,p} \text{ jest drzewem}\right)$,

(c) $\mathbb{P}\left(d_{G_{n,p}}(u,v) = 2\right)$, dla ustalonych $u, v \in V$.

Zadanie 2. Udowodnij, że jeżeli $0 < p < 1$ oraz:

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{t} (1-p)^{\binom{t}{2}} < 1,$$

to $R(k,t) > n$.

Zadanie 3. Niech H będzie n-jednolitym hipergrafem ($n \geqslant 2$) o mniej niż 2^{n-1} krawędziach. Wykaż, że istnieje takie 2-kolorowanie wierzchołków tego hipergrafu, że każda krawędź zawiera wierzchołki w obu kolorach.

Zadanie 4. Turniej $T_n = (V, A)$ ma własność S_k, $k \in [n]$, jeżeli

$$\forall K \in \binom{V}{k} \quad \exists v \in V \setminus K \quad \forall u \in K \colon vu \in A.$$

Udowodnij, że jeśli $\binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k} < 1$, to istnieje turniej T_n o własności S_k.

Zadanie 5. Niech F będzie rodziną skończonych ciągów binarnych taką, że żaden element F nie jest prefiksem żadnego innego. Udowodnij, że:

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_i \frac{1}{2^i} \leqslant 1,$$

gdzie N_i oznacza liczbę elementów rodziny F długości i.

Zadanie 6. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ taką, że żaden element rodziny $\mathcal{F}$ nie jest podzbiorem żadnego innego. Udowodnij, że:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{N_k}{\binom{n}{k}} \leqslant 1,$$

gdzie N_k oznacza liczbę elementów rodziny $\mathcal{F}$ o liczebności k.

Zadanie 7. Zbiór $\{(A_i, B_i), 1 \leqslant i \leqslant h\}$ nazywamy (k,l)-systemem ($k, l \in \mathbb{N}$), jeżeli:

- $A_i \cap B_i = \emptyset$, $i \in [h]$,
- $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, $i, j \in [h]$, $i \neq j$,
- $|A_i| = k$, $|B_i| = l$, $i \in [h]$.

Wykaż, że $h \leqslant \binom{k+l}{k}$.

Zadanie 8. Niech $\{(A_i, B_i), 1 \leqslant i \leqslant h\}$ będzie rodziną par zbiorów liczb naturalnych, spełniającą:

- $A_i \cap B_i = \emptyset$, $i \in [h]$,
- $(A_i \cap B_j) \cup (A_j \cap B_i) \neq \emptyset$, $i, j \in [h]$, $i \neq j$,
- $|A_i| + |B_i| = n$, $i \in [h]$.

Wykaż, że $h \leqslant 2^n$.

Zadanie 9. Każdy wyraz macierzy $A = \{a_{ij}\}$ wymiaru 100×100 jest liczbą naturalną ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 5000\}$. Wiadomo dodatkowo, że każda liczba z tego zbioru występuje w macierzy dokładnie dwa razy. Udowodnij, że można wybrać 100 wyrazów macierzy w taki sposób, aby:

a) z każdego wiersza wybrany został dokładnie jeden element,

b) z każdej kolumny wybrany został dokładnie jeden element,

c) wybrane liczby były parami różne.

Zadanie 10. Niech $\phi = \bigwedge_{i=1}^{m} C_j$ będzie formułą logiczną w koniunkcyjnej postaci normalnej (CNF) i niech $|C_j| = k$, $j = 1, \ldots, m$. Pokaż, że jeżeli $m < 2^k$, to ϕ jest spełnialna. Czy to ograniczenie na liczbę klauzul jest optymalne?