Zestaw 4

Jakub Kwaśny

Zadanie 1. Znajdź wartość oczekiwaną liczby punktów stałych losowej permutacji.

Zadanie 2. Udowodnij, że istnieje turniej T_n o co najmniej $n!2^{1-n}$ ścieżkach Hamiltona.

Zadanie 3. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem rozmiaru $\|G\| = m$ i rzędu $|G| = n$. Wykaż, że G zawiera podgraf dwudzielny o co najmniej $\frac{m}{2}$ krawędziach.

Zadanie 4. Niech $v_1, \ldots, v_n$ będą wektorami jednostkowymi z przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wykaż, że istnieją współczynniki $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ takie, że:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i \right\| \leqslant \sqrt{n}.$$

Zadanie 5. Niech $H = (V, E)$ będzie n-jednolitym hipergrafem o 4^{n-1} krawędziach ($n \geqslant 2$). Udowodnij, że istnieje takie 4-kolorowanie tego hipergrafu, że żadna krawędź nie jest monochromatyczna.

Zadanie 6. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem rzędu n. Wykaż, że G zawiera zbiór niezależny złożony z przynajmniej $\displaystyle\sum_{v \in V} \frac{1}{\deg(v) + 1}$ wierzchołków.

Zadanie 7. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem rzędu n. Dane jest kolorowanie właściwe c grafu G przy użyciu pewnej (nieokreślonej) liczby kolorów, posiadające własność, że każdy wierzchołek ma swoich sąsiadów pokolorowanych na co najwyżej M różnych kolorów. Wykaż, że G zawiera zbiór niezależny złożony z przynajmniej $\frac{n}{M+1}$ wierzchołków.

Zadanie 8. Jakub i Rafał grają w grę na planszy z pozycjami o etykietach $\{0, 1, \ldots k\}$. Początkowo wszystkie n żetonów znajduje się na pozycji k. Gra toczy się przez r rund, a każda runda ma następujący przebieg: Jakub wskazuje pewien podzbiór S żetonów na planszy, a następnie Rafał albo przesuwa wszystkie żetony ze zbioru S jedną pozycję w lewo, albo przesuwa wszystkie żetony ze zbioru S^c jedną pozycję w lewo. Każdy żeton przesunięty w lewo z pozycji 0 zostaje usunięty z planszy. Jeśli po zakończeniu gry na planszy pozostanie 1 lub 0 żetonów, gra kończy się zwycięstwem Jakuba, w przeciwnym przypadku wygrywa Rafał. Udowodnij, że jeśli $n \cdot \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{r}{i} 2^{-r} > 1$, to Rafał ma strategię wygrywającą.

Wskazówka: skorzystaj z twierdzenia Zermela.

Twierdzenie 1 (Zermelo[1]). *Dla dowolnej skończonej, nielosowej gry dwuosobowej o doskonałej informacji, w której gracze wykonują ruchy na przemian i która nie może zakończyć się remisem, jeden z graczy ma strategię wygrywającą.*

Zadanie 9. Niech H będzie n-jednolitym hipergrafem ($n \geqslant 4$) o co najwyżej $4^{n-1}/3^n$ krawędziach. Udowodnij, że istnieje 4-kolorowanie wierzchołków H takie, że każda krawędź jest tęczowa.

Zadanie 10. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem rozmiaru $\|G\| = m$ i rzędu $|G| = n = 2k$, który ma skojarzenie pełne. Wykaż, że G zawiera podgraf dwudzielny o co najmniej $\frac{1}{2}(m + k)$ krawędziach.

Wskazówka: zaprojektuj losowanie tak, aby krawędzie skojarzenia na pewno trafiły do podgrafu dwudzielnego.

[1] E. Zermelo, *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*, 1913.

Zadanie 11. Niech A będzie macierzą $n \times n$, której elementy $a_{i,j}$ są niezależnie i z jednakowym prawdopodobieństwem wybrane ze zbioru $\{-1, 1\}$. Oblicz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej losowej $X = \det(A)$.

Zadanie 12. *Spacerem losowym* długości t w grafie $G = (V, E)$, gdzie $V = [n]$, nazywamy ciąg zmiennych losowych $X_0, \ldots, X_t$, gdzie $X_0 \in [n]$ jest ustalonym wierzchołkiem początkowym, a X_i jest liczbą naturalną odpowiadającą wierzchołkowi wybranemu z jednakowym prawdopodobieństwem spośród sąsiadów wierzchołka X_{i-1}, dla $i = 1, \ldots, t$.

Rozważmy hiperkostkę wymiaru r i załóżmy że rozpoczynamy spacer losowy od wierzchołka $(0, \ldots, 0)$. Niech Y_t oznacza odległość wierzchołka, do którego doszliśmy po t krokach, od punktu startowego (tj. liczbę jedynek w jego zapisie binarnym). Znajdź rozkład Y_1. Oblicz $\mathbb{E}(Y_t)$.