Zestaw 5

Jakub Kwaśny

Twierdzenie 1 (lemat o niezależności)**.** *Niech $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_m\}$ będzie zbiorem niezależnych zmiennych losowych, a $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ rodziną zdarzeń losowych takich, że każde zdarzenie A_i jest wyznaczone przez pewien podzbiór $F_i \subseteq \mathcal{X}$ tych zmiennych losowych. Wówczas jeżeli $F_i \cap (F_{i_1} \cup \cdots \cup F_{i_k}) = \emptyset$, to A_i jest niezależne od rodziny zdarzeń $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\}$.*

Zadanie 1. Dla danej przestrzeni probabilistycznej Ω, rodziny zdarzeń losowych $\mathcal{A}$ oraz wybranego zdarzenia $A \in \mathcal{A}$ wskaż maksymalną podrodzinę $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ taką, że A jest niezależne od podrodziny $\mathcal{A}'$.

(a) $\Omega = \{0,1\}^n$; $\quad \mathcal{A} = \{A_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega : x_i = 0\}, i \in [n]\}$; $\quad A = A_1$

(b) $\Omega = \{0,1\}^n$; $\quad \mathcal{A} = \{A_{i,j} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega : x_i + x_j = 1\}, i \in [n]\}$; $\quad A = A_{1,2}$

(c) Ω – zbiór wszystkich orientacji grafu K_n; A_v – wierzchołek v jest źródłem, $\mathcal{A} = \{A_v : v \in V(K_n)\}$; $A = A_v$ dla ustalonego v

(d) G - ustalony graf, Ω – wybieramy każdą krawędź grafu G niezależnie, z jednakowym prawdopodobieństwem p do zbioru E'; A_v – wierzchołek v jest incydentny z przynajmniej dwiema wybranymi krawędziami, $\mathcal{A} = \{A_v : v \in V(K_n)\}$; $A = A_v$ dla ustalonego v

Zadanie 2. Niech $H = (V, E)$ będzie hipergrafem, w którym każda krawędź zawiera przynajmniej k wierzchołków i każda krawędź przecina co najwyżej d innych. Wykaż, że jeżeli $e(d+1) \leqslant 2^{k-1}$, to istnieje takie dwukolorowanie wierzchołków hipergrafu H, że każda krawędź zawiera wierzchołki obu kolorów.

Zadanie 3. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem o stopniu maksymalnym Δ i niech $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$ będzie podziałem V na r rozłącznych podzbiorów, gdzie $|V_i| \geqslant 2e\Delta$, $i = 1, \ldots, r$. Udowodnij, że istnieje zbiór niezależny $W \subset V$, spełniający $|W \cap V_i| \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, r$.

Zadanie 4. Niech N, M będą skończonymi zbiorami takimi, że $|N| = n$, $|M| = m$. Wykorzystując podstawową metodę probabilistyczną, udowodnij, że jeżeli $n > \binom{m}{2}$, to istnieje iniekcja $f\colon M \to N$. Za pomocą LLL wzmocnij ten wynik, pokazując, że wystarczy założyć, że $n > 6m$.

Zadanie 5. Niech $\phi = \bigwedge_{i=1}^{m} C_j$ będzie formułą logiczną w koniunkcyjnej postaci normalnej (CNF) i niech $k = \min\{|C_j|, C_j \in \phi\}$. Pokaż, że jeżeli każdą klauzulę C_j przecina co najwyżej $2^k/e - 1$ innych klauzul, to ϕ jest spełnialna.

Zadanie 6. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $n \times n$ o elementach całkowitych. Permutację $\sigma\colon [n] \to [n]$ nazywamy łacińską transwersalą macierzy A, jeżeli elementy $a_{i\sigma(i)}$, $i \in [n]$ są parami różne. Pokaż, że jeżeli każda liczba całkowita występuje w macierzy A co najwyżej $\frac{n-1}{4e}$ razy, to A zawiera transwersalę łacińską.

Zadanie 7. Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym grafem zwykłym o maksymalnym stopniu Δ. Niech $c\colon V \to \mathbb{F}_2^k$ oraz

$$f(v) = \sum_{u \in N(v)} c(u).$$

Wykaż, że jeżeli $k \geqslant 2\log_2 \Delta + 3$, to istnieje taka funkcja c, dla której wszystkie wartości funkcji f są niezerowe.

Zadanie 8. Wykaż, że jeżeli każde k-kolorowanie zbioru $X^m \subset \mathbb{N}^m$ zawiera monochromatyczny podzbiór $S_1 \times \cdots \times S_m$, gdzie $S_i \in \binom{X}{2}$, to

$$|X| \geqslant \frac{k^{(2^m-1)/m}}{6}.$$

Zadanie 9. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem zwykłym i niech z każdym z wierzchołków $v \in V$ związany będzie zbiór $S(v)$ złożony z co najmniej $10d$ kolorów. Załóżmy ponadto, że $\forall v \in V \forall c \in S(v) : v$ ma co najwyżej d sąsiadów u takich, że $c \in S(u)$. Udowodnij, że istnieje kolorowanie właściwe wierzchołków grafu G z list.

Zadanie 10. Niech $D = (V, E)$ będzie digrafem takim, że każdy wierzchołek ma dokładnie δ krawędzi wychodzących oraz co najwyżej Δ krawędzi wchodzących. Udowodnij, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$, spełniającego:

$$k \leqslant \frac{\delta}{1 + \ln(1 + \delta\Delta)},$$

digraf D zawiera cykl długości podzielnej przez k.

Wskazówka: wykaż, że istnieje kolorowanie $f : V \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$ *takie, że każdy wierzchołek* v *ma sąsiada* $u \in N^+(v)$ *o kolorze* $f(v) + 1 \pmod{k}$.

Zadanie 11. Przez $Z(k)$ oznaczmy najmniejszą liczbę naturalną n taką, że jeśli podzielimy zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ na dwa rozłączne podzbiory, to co najmniej jeden z nich zawiera ciąg arytmetyczny długości k. Wykaż, że $Z(k) > 2^k/(8k)$.