Zliczanie z wykorzystaniem lematu Burnside'a oraz twierdzenia Pólyi

Jakub Kwaśny, 2019

1 Pojęcia wstępne

Definicja 1 (grupa)**.** Niech Γ będzie zbiorem, na którym określone zostało działanie $\circ\colon \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$. Parę $(\Gamma, \circ)$ nazywamy *grupą*, jeżeli spełnione są następujące warunki:

- $\forall a, b \in \Gamma\colon (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (łączność),
- $\exists 1 \in \Gamma \quad \forall a \in \Gamma\colon a \circ 1 = 1 \circ a = a$ (istnienie el. neutralnego),
- $\forall a \in \Gamma \quad \exists b \in \Gamma\colon a \circ b = b \circ a = 1$ (istnienie el. odwrotnych).

W dalszej części elementami grupy zwykle będą odwzorowania. Na przykład dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ zbiór automorfizmów tego grafu (tj. takich bijekcji $f\colon V \to V$, że $uv \in E \iff f(u)f(v) \in E$) z działaniem złożenia funkcji stanowi grupę.

Definicja 2 (działanie grupy na zbiorze)**.** Niech $(\Gamma, \circ)$ będzie grupą, a X pewnym zbiorem. *Działaniem grupy* Γ *na zbiorze* X nazywać będziemy funkcję $\Gamma \times X \ni (g, x) \mapsto gx \in X$, jeżeli spełnione są warunki:

- $\forall g, h \in \Gamma \quad \forall x \in X\colon (g \circ h)x = g(hx)$,
- $\forall x \in X\colon 1x = x$,

gdzie 1 jest elementem neutralnym w Γ. Mówimy wówczas że grupa Γ *działa na zbiorze* X.

Jeśli X jest dowolnym zbiorem niepustym, a Γ dowolną podgrupą grupy permutacji $S(X)$, to Γ w naturalny sposób działa na zbiorze X poprzez działanie $\pi x = \pi(x)$, dla każdego $\pi \in \Gamma$, $x \in X$.

Ćwiczenie 1. Pokazać, że jeśli Γ działa na zbiorze X, to dla dowolnego elementu $g \in \Gamma$ odwzorowanie $X \ni x \mapsto gx \in X$ jest permutacją zbioru X.

Dwa powyższe spostrzeżenia oznaczają, że od tej pory możemy traktować grupę Γ jako pewną podgrupę grupy permutacji $S(X)$.

Definicja 3. Niech $(\Gamma, \circ)$ będzie grupą działającą na zbiorze X. *Orbitą* elementu $x \in X$ nazywamy zbiór

$$Orb(x) = \{gx \mid g \in \Gamma\}.$$

Element $x \in X$ nazywamy punktem stałym elementu $g \in \Gamma$, jeżeli $gx = x$. Zbiór punktów stałych elementu $g \in \Gamma$ oznaczać będziemy przez $Fix(g)$.

Innymi słowy, jeśli traktujemy grupę Γ jako pewną grupę przekształceń zbioru X, wówczas orbita elementu x to zbiór wszystkich elementów X na które przechodzi x poprzez zastosowanie pewnego przekształcenia z Γ. Łatwo zauważyć, że orbity wszystkich elementów zbioru X tworzą podział zbioru X, który oznaczać będziemy przez X/Γ, tj. $X/\Gamma = \{Orb(x) \mid x \in X\}$. Podstawowym narzędziem do wyznaczania liczby orbit jest lemat Burnside'a.

2 Lemat Burnside'a

Twierdzenie 1 (Cauchy 1845, Frobenius 1887)**.** *Niech* $(\Gamma, \circ)$ *będzie grupą działającą na zbiorze* X*. Wówczas*

$$|X/\Gamma| = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{g \in \Gamma} |Fix(g)|.$$

Przykład 2. Ile jest różnych kolorowań 4-koralikowego łańcuszka przy użyciu n kolorów? Łańcuszek możemy dowolnie obracać w przestrzeni trójwymiarowej.

Aby rozwiązać takie zadanie z wykorzystaniem lematu Burnside'a, należy zacząć od zidentyfikowania grupy Γ oraz zbioru X. Ponumerujmy koraliki w łańcuszku liczbami 0,1,2,3. Elementami zbioru X będą kolorowania, a zatem funkcje $f\colon \{0,1,2,3\} \to [n]$. Grupa działająca na tym zbiorze generowana będzie przez obroty i symetrie łańcuszka. Elementami grupy będą więc cztery obroty: id, o_1, o_2, o_3, dwie symetrie względem przekątnych: s_1, s_2 oraz dwie symetrie względem symetralnych boków: s_3, s_4.

Lemat Burnside'a nakazuje nam wyznaczyć liczbę punktów stałych dla każdego elementu grupy Γ. Jasne jest, że dla odwzorowania stałego id jest to $|X| = n^4$. Dla obrotów o_1 i o_3 punktami stałymi będą tylko te kolorowania, które używają dokładnie jednego koloru - jest ich n. Punkty stałe obrotu o_2 muszą mieć identyczne kolory w koralikach 0 i 2 oraz 1 i 3 - jest ich więc n^2. Podobna sytuacja jest w przypadku symetrii względem symetralnych boków. Pozostają symetrie względem przekątnych - tam dwa wierzchołki zostają w miejscu i mogą mieć dowolny kolor, a dwa pozostałe muszą mieć ten sam, trzeci kolor - stąd n^3 takich kolorowań.

Ostatecznie otrzymujemy, że liczba orbit, czyli różnych kolorowań po uwzględnieniu symetrii i obrotów, wynosi $\frac{1}{8}(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n)$.

3 Twierdzenie Pólyi

Metoda zliczania wprowadzona przez Pólyę, wymaga zdefiniowania nowego zbioru Y oraz rodziny funkcji $f\colon X \to Y$, oznaczanej przez Y^X. Na przykład gdy Y jest zbiorem kolorów, to każda funkcja $f \in Y^X$ jest interpretowana jako pewne kolorowanie elementów zbioru X. Wówczas Y^X/Γ rozumiemy jako liczbę różnych kolorowań; różnych ze względu na pewne działanie grupy Γ na zbiorze Y^X.

Jeśli grupa Γ działa na zbiorze X, to naturalnym działaniem tej samej grupy Γ na zbiorze Y^X jest:

$$(gf)(x) := f(gx), \tag{1}$$

dla dowolnego $g \in \Gamma$, $f \in Y^X$, $x \in X$. Od tej pory, jeśli nie zostanie powiedziane inaczej, będziemy traktować to działanie jako domyślne działanie grupy Γ na zbiorze Y^X.

Ćwiczenie 3. Pokazać, że działanie określone wzorem (1) spełnia definicję działania grupy Γ na zbiorze Y^X.

Definicja 4. *Typem* permutacji $\pi \in S(X)$, $|X| = n$, nazywamy ciąg $(c_1, \ldots, c_n)$, gdzie $c_i = c_i(\pi)$ oznacza liczbę cykli długości i w rozkładzie permutacji π na cykle. Dodatkowo przez $c(\pi)$ oznaczać będziemy liczbę wszystkich cykli permutacji π (a więc $c(\pi) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\pi)$).

Przykładowo, permutację $\pi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 1 & 4 & 6 \end{smallmatrix}\right)$ zapisujemy w postaci cyklicznej jako $\pi = (135)(2)(476)$, zatem typem permutacji π jest ciąg $(1,0,2,0,0,0,0)$, zatem na przykład $c_3(\pi) = 2$ oraz $c(\pi) = 3$.

Ćwiczenie 4. Udowodnij, że dla dowolnej permutacji $\pi \in S(X)$, $|X| = n$,

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot c_i(\pi) = n.$$

Definicja 5. *Wielomianem cyklowym* P_Γ działania grupy Γ na zbiorze X, $|X| = n$, nazywamy wielomian:

$$P_\Gamma(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{g \in \Gamma} z_1^{c_1(g)} \cdot \ldots \cdot z_n^{c_n(g)}.$$

Poniższa, nieważona wersja twierdzenia Pólyi jest prostym uogólnieniem lematu Burnside'a.

Twierdzenie 2 (Redfield 1927, Pólya 1937)**.** *Niech Γ będzie grupą działającą na skończonym zbiorze X oraz niech Y będzie dowolnym zbiorem skończonym. Wówczas*

$$|Y^X/\Gamma| = P_\Gamma(|Y|, |Y|, \ldots, |Y|) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{g \in \Gamma} |Y|^{c(g)}.$$

Ćwiczenie 5. Rozwiąż przykład 2 za pomocą twierdzenia Pólyi.

Prezentujemy również wersję ważoną, która stosuje się do szerszej klasy problemów.

Twierdzenie 3 (Redfield 1927, Pólya 1937)**.** *Niech* Γ *będzie grupą działającą na skończonym zbiorze* X*,* $|X| = n$*, oraz niech* Y *będzie dowolnym zbiorem skończonym,* $|Y| = m$*. Wówczas współczynnik przy* $t_1^{r_1} \ldots t_m^{r_m}$ *w wielomianie:*

$$P_\Gamma(t_1 + \cdots + t_m, t_1^2 + \cdots + t_m^2, \ldots, t_1^n + \cdots + t_m^n)$$

określa liczbę orbit z rodziny Y^X/Γ*, składających się z takich kolorowań, w których* i*-ty kolor występuje dokładnie* r_i *razy.*

Przykład 6. Ile jest różnych kolorowań 23-koralikowego łańcuszka przy użyciu 4 kolorów tak, aby kolor zielony występował dokładnie 11 razy? Łańcuszek możemy dowolnie obracać w przestrzeni dwuwymiarowej.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, zaczynamy od określenia grupy Γ oraz zbiorów X i Y. Zbiór X składał się będzie z 23 koralików w łańcuszku, natomiast zbiór Y z czterech kolorów - wówczas Y^X to zbiór wszystkich 4-kolorowań łańcuszka. Grupa Γ działająca na zbiorze X to grupa obrotów, a więc $\Gamma = \{id, o_1, \ldots, o_{22}\}$. Aby zastosować twierdzenie Pólyi, musimy wyznaczyć wielomian cyklowy P_Γ, interesują nas więc typy wszystkich permutacji z grupy Γ. Oczywiście $c_1(id) = 23$. Łatwo zauważyć, że dla pozostałych elementów grupy mamy $c_{23}(o_i) = 1$. Zatem wielomian cyklowy ma postać

$$P_\Gamma(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{23}(z_1^{23} + 22z_{23}),$$

a liczba szukanych kolorowań to suma współczynników przy wszystkich takich jednomianach wielomianu

$$\frac{1}{23}\left((t_1 + t_2 + t_3 + t_4)^{23} + 22(t_1^{23} + t_2^{23} + t_3^{23} + t_4^{23})\right),$$

w których zmienna t_1 występuje w potędze 11.

Ćwiczenie 7. Ile jest różnych kolorowań 22-koralikowego łańcuszka przy użyciu 4 kolorów tak, aby kolor pierwszy występował dokładnie 11 razy? Łańcuszek możemy dowolnie obracać w przestrzeni dwuwymiarowej.