

Zestaw 8

Jakub Kwaśny

W poniższych zadaniach zwrot „prawie na pewno zachodzi własność \mathcal{P} ” należy rozumieć jako równoważny z: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(G_{n,p} \in \mathcal{P}) = 1$.

Zadanie 1. W modelu $\mathcal{G}(n, \frac{1}{n})$ udowodnij że prawie na pewno żaden wierzchołek nie należy do więcej niż jednego trójkąta.

Zadanie 2. W modelu $\mathcal{G}(n, \frac{c}{n})$, zbadaj do czego zmierza wartość oczekiwana liczby cykli Hamiltona, przy $n \rightarrow \infty$, w zależności od wartości stałego parametru c . Wykorzystaj wzór Stirlinga. Czy istnieje taka stała c_0 , że funkcją progową dla hamiltonowskości jest $\frac{c_0}{n}$?

Zadanie 3. Udowodnij, że funkcja progowa dla własności posiadania cyklu to $t_n = \frac{1}{n}$.

Wskazówka: zauważ, że jeżeli $|E(G)| \geq |V(G)|$, to graf ma cykl. Wykorzystaj nierówność Czebyszewa.

Zadanie 4. Udowodnij, że funkcja progowa dla własności: średnica równa 2, jest równa $t_n = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\ln n}{n}}$.

Wskazówka: zamiast rozważać $p \ll t$, przyjmij $p = c \cdot \sqrt{\frac{\ln n}{n}}$ gdzie $c < \sqrt{2}$, analogicznie w drugą stronę.

Zadanie 5. Niech H będzie grafem powstałym z K_4 poprzez dodanie do jednego z wierzchołków wiszącej krawędzi.

(a) Czy H jest grafem wyważonym?

(b) Definiujemy X jako zmienną losową w przestrzeni $\mathcal{G}(n, p)$, która jest równa liczbie (niekoniecznie indukowanych) kopii H w grafie $G(n, p)$. Oblicz $\mathbb{E}(X)$.

Zadanie 6. Niech H będzie grafem, który nie jest wyważony, $k = |H|$, $l = \|H\|$. Udowodnij, że $t = n^{-k/l}$ nie jest funkcją progową własności zawierania podgrafu izomorficznego z H .

Zadanie 7. Wykaż, że wartość oczekiwana liczby składowych spójnych rzędu k w $G(n, p)$ jest równa co najwyżej $\binom{n}{k} k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{kn-k^2}$.

Zadanie 8. Rozważmy przestrzeń $\mathcal{G}(n, p)$, gdzie $p = c \frac{\ln n}{n}$. Korzystając z zadania 7, wykaż że jeśli $c > 1/2$, to prawie na pewno graf $G(n, p)$ ma jedną olbrzymią składową (złożoną z ponad połowy wierzchołków), a wszystkie pozostałe wierzchołki są izolowane.