Zestaw 2

Jakub Kwaśny

Zadanie 1. Wykorzystując dowody kombinatoryczne, udowodnij następujące równości:

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

(b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(c) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

(d) $\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}$

(e) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

(f) $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}^2 = n^2\binom{2n-2}{n-1}$

(g) $\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k} = 3^n$

(h) $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{m+n+1}{n+1}$

Zadanie 2. Na ile sposobów można pokolorować wierzchołki sześciokąta foremnego pięcioma kolorami? Sześciokąt możemy dowolnie obracać

(a) na płaszczyźnie.

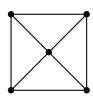
(b) w przestrzeni trójwymiarowej.

Zadanie 3. Ile jest różnych naszyjników, zawierających pięć koralików, każdy w jednym z trzech kolorów?

Zadanie 4. Ile jest różnych naszyjników, zawierających pięć koralików, każdy w jednym z trzech kolorów, z czego dokładnie dwa są niebieskie?

Zadanie 5. Ile jest różnych kolorowań 22-koralikowego łańcuszka przy użyciu 4 kolorów tak, aby kolor pierwszy występował dokładnie 11 razy? Łańcuszek możemy dowolnie obracać w przestrzeni dwuwymiarowej.

Zadanie 6. Ile jest różnych kolorowań witraża (rys. poniżej) kolorami czerwonym, niebieskim i zielonym, w których nie występuje kolor czerwony albo kolor zielony występuje dokładnie raz, jeśli witrażem możemy dowolnie obracać oraz możemy patrzeć na niego z drugiej strony?



Zadanie 7. W urnie znajdują się kule czarne, białe, zielone i niebieskie. Ile różnych ciągów długości n można z nich ułożyć? Nie rozróżniamy, czy dany ciąg oglądany jest od lewej, czy od prawej strony.

Zadanie 8. Na ile sposobów można pokolorować wierzchołki sześcianu dwoma kolorami tak, aby dokładnie trzy wierzchołki były koloru różowego?