Zestaw 7

Jakub Kwaśny

Własność rozszerzania:

$$\forall_{\substack{U,W\subset V(G)\\ U\cap W=\emptyset\\ |U|,|W|<\infty}} \exists_{v\in V(G)\setminus(U\cup W)} \colon (U\subset N(v) \wedge W\cap N(v)=\emptyset) \tag{1}$$

Twierdzenie 1 (bez dowodu)**.** *Niech G_1, G_2 - grafy nieskończone, przeliczalne, które spełniają* (1)*. Wówczas $G_1 \cong G_2$.*

Zatem istnieje dokładnie jeden nieskończony graf przeliczalny spełniający (1). Nazywamy go grafem Rada i oznaczamy $\mathcal{R}$.

Zadanie 1. Niech $G = (V, E)$, $V = \mathbb{N}$ oraz dla dowolnych $u, v \in V$, $u < v$ określamy niezależnie $P(uv \in E) = \frac{1}{2}$. Udowodnij, że $G \cong \mathcal{R}$ prawie na pewno.

Zadanie 2. Udowodnij, że $\mathcal{R}$ jest *jednorodny*, tj. izomorfizm między dowolnymi dwoma skończonymi indukowanymi podgrafami można rozszerzyć do automorfizmu całego grafu.

Zadanie 3. Niech $U, V \subset V(\mathcal{R})$ będą skończonymi i rozłącznymi zbiorami oraz:

$$Z = \{w \in V(\mathcal{R})\colon \forall u \in U\ uw \in E(\mathcal{R}), \forall v \in V\ vw \notin E(\mathcal{R})\}$$

Udowodnij, że zbiór Z jest nieskończony, a graf indukowany przez Z jest izomorficzny z grafem Rada.

Twierdzenie 2. *Niech $\mathcal{P}$ będzie własnością grafów wyrażoną w języku pierwszego rzędu*[1]*. Wówczas asymptotycznie prawie wszystkie grafy mają własność $\mathcal{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{R}$ ma własność $\mathcal{P}$.*

Zadanie 4. Czy asymptotycznie prawie wszystkie grafy:

(a) mają podgraf indukowany H (dla pewnego, z góry ustalonego H)?

(b) są k-regularne (dla pewnego, z góry ustalonego $k \in \mathbb{N}$)?

(c) są spójne?

(d) mają liczbę chromatyczną równą co najwyżej k (dla pewnego, z góry ustalonego $k \in \mathbb{N}$)?

(e) są samodopełniające się?

Zadanie 5. Udowodnij, że asymptotycznie prawie wszystkie grafy są asymetryczne, tj. nie mają innych automorfizmów niż odwzorowanie identycznościowe.

[1] To znaczy taką, która używa wyłącznie: nazw wierzchołków, zmiennych należących do zbioru wierzchołków, relacji równości, relacji sąsiedztwa wierzchołków, spójników logicznych, nawiasów i kwantyfikatorów: $\forall x \in V$, $\exists x \in V$.