Kolokwium 1

Metody probabilistyczne matematyki dyskretnej

5 grudnia 2017

Część A

Zadanie 1 ($5\cdot$(1p+1p))**.** Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, $A_1, A_2, ... \subset \Omega$. Dla każdego wyrażenia poniżej określ, czy jest ono prawdziwe, czy nie. Podaj krótkie uzasadnienie.

(a) $(\forall_i : \mathbb{P}(A_i) = 0) \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$

(b) Jeżeli A_1, A_2 są zdarzeniami niezależnymi, to $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$.

(c) Jeżeli X jest dodatnią zmienną losową, to $\mathbb{P}(X) > 0$.

(d) Jeżeli $\mathbb{E}(X) = 1$, to istnieje $\omega \in \Omega : X(w) > 1$.

(e) Niech X, Y będą nieujemnymi zmiennymi losowymi spełniającymi $Y = X^2$.
Wówczas $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

Część B

Zadanie 2 (10p)**.** Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych o sumie cyfr równej 20, w których cyfra 9 może wystąpić jedynie na pierwszej pozycji?

Zadanie 3 (10p)**.** Ile jest różnych kolorowań wierzchołków czworościanu foremnego trzema kolorami, w których dokładnie jeden wierzchołek jest koloru amarantowego, jeżeli czworościanem możemy dowolnie obracać?

Zadanie 4 (10p)**.** Przez $W(k)$ oznaczmy najmniejszą liczbę taką, że każdy ciąg binarny długości $W(k)$ zawiera podciąg stały długości k, którego indeksy tworzą ciąg arytmetyczny (jeśli niejasne, zapytaj). Wykaż, że $W(k) > \lfloor 2^{\frac{k}{2}} \rfloor$.

Zadanie 5 (10p)**.** Udowodnij, że istnieje dwukolorowanie krawędzi grafu K_n, które zawiera co najwyżej

$$\binom{n}{a} 2^{1-\binom{a}{2}}$$

monochromatycznych kopii K_a ($a \leqslant n$).