

Kolokwium 1

gr. 4

Metody probabilistyczne matematyki dyskretnej

29 listopada 2018

Zadanie 1 (6p+4p+3p). Dany jest ciąg a_n spełniający:

$$a_n = na_{n-1} - 4^n, \quad n \geq 1$$

$$a_0 = a$$

- (a) Oblicz wzór ogólny ciągu a_n .
- (b) Wyznacz najmniejszą wartość parametru a dla której wszystkie wyrazy ciągu są nieujemne.
- (c) Wyznacz wartość parametru a , dla której $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n \cdot n!} = 4$.

Zadanie 2 (12p). Sylwia dostała w prezencie naszyjnik składający się z $n = p \cdot q$ koralików, gdzie p i q są pewnymi różnymi liczbami pierwszymi. Zakładając, że naszyjnik znajduje się już na szyi, a więc można nim tylko obracać, na ile sposobów można go pokolorować przy użyciu (co najwyżej) trzech kolorów tak, aby dokładnie 4 koraliki były w kolorze błękitu Thénarda¹?

Zadanie 3 (15p). Niech \mathcal{F} będzie rodziną podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ taką, że żaden element rodziny \mathcal{F} nie jest podzbiorem żadnego innego. Udowodnij, że:

$$\sum_{k=0}^n \frac{N_k}{\binom{n}{k}} \leq 1,$$

gdzie N_k oznacza liczbę elementów rodziny \mathcal{F} o liczebności k .

Zadanie 4 (10p). Niech H będzie n -jednorodnym hipergrafem ($n \geq 4$) o co najwyżej $4^{n-1}/3^n$ krawędziach. Udowodnij, że istnieje 4-kolorowanie wierzchołków H takie, że każda krawędź jest tęczowa (zawiera wszystkie kolory).

¹Louis Jacques Thénard (1777-1857) - francuski chemik, odkrywca boru i nadtlenu wodoru. Zbadał wpływ światła na reakcję chloru z wodorem w 1809 roku. W tym samym roku stwierdził, że siarka jest pierwiastkiem chemicznym.