Kolokwium 1

gr. V
Metody probabilistyczne matematyki dyskretnej

14 listopada 2019

Zadanie 1 (5p+6p)**.** Wykorzystując dowody kombinatoryczne, udowodnij następujące równości:

(a) $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}^2 = n^2 \binom{2n-2}{n-1}$ (b) $\sum_{k=3}^{n} \binom{k-1}{2} = \binom{n}{3}$

Zadanie 2 (12p)**.** Na ile sposobów można pokolorować wierzchołki sześcianu trzema kolorami tak, aby dokładnie cztery wierzchołki były koloru zieleni Veronese'a[1]? Sześcianem możemy dowolnie obracać w przestrzeni trójwymiarowej.

Zadanie 3 (13p)**.** Udowodnij, że jeżeli $\binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k} < 1$, to istnieje relacja $\prec$ na zbiorze n-elementowym X, taka, że:

- $\prec$ jest asymetryczna oraz spójna, tj. $\forall x, y \in X, x \neq y : x \prec y \iff y \not\prec x$ oraz
- każdy k-elementowy podzbiór X ma ograniczenie górne, tj.:

$$\forall A \in \binom{X}{k} \quad \exists x \in X \setminus A \quad \forall a \in A : a \prec x.$$

Zadanie 4 (14p)**.** Niech $G = (V, E)$ będzie grafem rozmiaru $\|G\| = m$ i rzędu $|G| = n = 2k$, który ma skojarzenie pełne. Wykaż, że G zawiera podgraf dwudzielny o co najmniej $\frac{1}{2}(m+k)$ krawędziach.
Wskazówka: zaprojektuj losowanie tak, aby krawędzie skojarzenia na pewno trafiły do podgrafu dwudzielnego.

[1] Paolo Veronese (1528-1588) - włoski malarz renesansowy, znany z wielkoformatowych obrazów o tematyce religijnej oraz mitologicznej.