

# Kolokwium 1

Metody probabilistyczne matematyki dyskretnej

3 grudnia 2020

**Zadanie 1** (7p+5p).

- (a) Ile jest różnych permutacji liter wyrażenia MATEMATYKADYSKRETNA, które nie zawierają żadnego ze słów: DYSK, KRET?
- (b) Elfy pakują właśnie prezenty w kwaterze głównej św. Mikołaja. Każde grzeczne dziecko dostanie w tym roku pudełko czekoladek, które występują w czterech smakach: mlecznym, orzechowym, karmelowym i truflowym. Każde pudełko zawiera 13 czekoladek, przy czym każdy ze smaków musi wystąpić przynajmniej raz. W pewnym miasteczku mieszka 250 grzecznych dzieci. Czy jest możliwe, aby każde z nich dostało pudełko o innej zawartości?

**Zadanie 2** (12p). Dany jest stelaż złożony z metalowych prętów (rys. poniżej). Na ile sposobów możemy pomalować **pręty** kolorami czerwonym, niebieskim i zielonym, tak, aby każdy z kolorów został użyty przynajmniej dwa razy, jeśli stelażem możemy dowolnie obracać oraz możemy patrzeć na niego z drugiej strony?



**Zadanie 3** (13p). Niech  $\phi = \bigwedge_{i=1}^m C_i$  będzie formułą logiczną w koniunkcyjnej postaci normalnej (tj. każda z klauzul  $C_j$  jest alternatywą zmiennych lub ich zaprzeczeń) i niech  $|C_j| = k$ , dla  $j = 1, \dots, m$ . Pokaż, że jeżeli  $m < 2^k$ , to  $\phi$  jest spełnialna. Czy to ograniczenie na liczbę klauzul jest optymalne?

**Zadanie 4** (13p). Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem rzędu  $n$ , który ma  $t$  trójkątów. Wykaż, że  $G$  zawiera podgraf trójdzielny o co najmniej  $\frac{2}{3}t$  trójkątach.