

Kolokwium 1

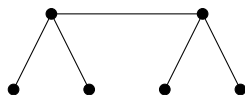
Metody probabilistyczne matematyki dyskretnej

25 listopada 2021

Zadanie 1 (4p+6p).

- (a) Ile jest liczb postaci $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, gdzie a, b, c, d są liczbami naturalnymi dodatnimi, których suma wynosi 15?
- (b) Ile jest liczb $(2k + 1)$ -cyfrowych palindromicznych, które zawierają dokładnie $2l$ jedynek?

Zadanie 2 (13p). Na ile sposobów można pokolorować wierzchołki grafu G (rys. poniżej) trzema kolorami tak, aby dokładnie dwa wierzchołki były w kolorze zieleni Veronese'a¹? Kolorowania uznajemy za identyczne, jeżeli pewien automorfizm grafu G przeprowadza jedno w drugie.



Zadanie 3 (14p). Udowodnij, że jeżeli $(k!)^2 > n!$ oraz $k < n$, to istnieje permutacja zbioru $[n]$, która nie zawiera podciągu monotonicznego długości k (podciąg ten nie musi się składać z kolejnych wyrazów).

Zadanie 4 (13p). Udowodnij, że istnieje takie 2-kolorowanie krawędzi grafu dwudzielnego pełnego $K_{m,n}$, które zawiera mniej niż $\binom{m}{a} \binom{n}{b} 2^{1-ab}$ monochromatycznych kopii $K_{a,b}$ ($m \geq a > n \geq b$).

¹Paolo Veronese (1528-1588) - włoski malarz renesansowy, znany z wielkoformatowych obrazów o tematyce religijnej oraz mitologicznej.