# Kolokwium 2

Metody probabilistyczne matematyki dyskretnej

25 stycznia 2018

**Zadanie 1** (10p)**.** Kolorowanie wierzchołkowe grafu $G$ nazywamy *oszczędnym*, jeżeli jest ono kolorowaniem właściwym oraz gdy sąsiedztwo dowolnego wierzchołka zawiera co najwyżej po jednym wierzchołku każdego koloru. Udowodnij, że każdy graf o stopniu maksymalnym $\Delta \geqslant 2$ posiada kolorowanie oszczędne przy użyciu $\Delta^3$ kolorów.

**Zadanie 2** (10p)**.** Przez $W(k)$ oznaczmy najmniejszą liczbę taką, że każdy ciąg binarny długości $W(k)$ zawiera podciąg stały długości $k$, którego indeksy tworzą ciąg arytmetyczny (jeśli niejasne, zapytaj). Wykaż, że $W(k) > 2^k/(8k)$.

**Zadanie 3** (10p)**.** Udowodnij, że funkcją progową dla własności: „brak wierzchołków izolowanych" jest $\frac{\ln n}{n}$.

*Wskazówka (opcjonalna): wykorzystaj nierówność:* $1 - x \leqslant e^{-x}$.

**Twierdzenie 1** (Nierówność Chernoffa)**.** *Niech $X$ będzie zmienną losową o rozkładzie Bernoulliego, to znaczy sumą $n$ niezależnych zmiennych losowych, z których każda przyjmuje wartość 1 z prawdopodobieństwem $p$ oraz 0 z prawdopodobieństwem $1-p$. Wówczas dla dowolnego $t \in [0, np]$:*

$$\mathbb{P}(X - np > t) < e^{-\frac{t^2}{3np}}$$

**Zadanie 4** (5p+5p)**.** Rozważmy model $\mathcal{G}(n,p)$, gdzie $p = n^{-1/2}$. Wykorzystując nierówność Chernoffa, oszacuj z góry prawdopodobieństwa:

(a) $p_1 = \mathbb{P}\left(||G|| > n\sqrt{n}\right)$,

(b) $p_2 = \mathbb{P}(\deg(v) > 3\sqrt{n})$, dla pewnego ustalonego z góry wierzchołka $v$.

Wyniki podaj w zależności od zmiennej $n$.