Kolokwium 2

Metody probabilistyczne matematyki dyskretnej

17 stycznia 2019

Własność rozszerzania:

$$\forall_{\substack{U,W\subset V(G)\\ U\cap W=\emptyset\\ |U|,|W|<\infty}} \exists_{v\in V(G)\setminus(U\cup W)} : (U \subset N(v) \wedge W \cap N(v) = \emptyset) \tag{1}$$

Zadanie 1 (12p)**.** Wykaż, że jeśli $e\binom{k}{2}\binom{n}{k-2} < 2^{\binom{k}{2}-1}$, to $R(k,k) > n$, gdzie $R(k,k)$ to liczba Ramseya.

Zadanie 2 (10p)**.** Niech H będzie grafem powstałym z K_3 poprzez dodanie do jednego z wierzchołków wiszącej krawędzi. Udowodnij, nie powołując się na tw. Erdősa-Rényiego, że jeśli $p << \frac{1}{n}$, to:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G_{n,p} \text{ zawiera } H) = 0.$$

Zadanie 3 (8p+4p)**.**

(a) Czy asymptotycznie prawie wszystkie grafy są 2-spójne? Udowodnij.

(b) Czy asymptotycznie prawie wszystkie grafy są k-spójne (dla dowolnego, z góry ustalonego $k \in \mathbb{N}$)? [TAK/NIE + 2 zdania uzasadnienia]

Zadanie 4 (16p)**.** Niech $G = (V, E)$ będzie grafem nieskończonym, którego stopień maksymalny jest równy $\Delta < \infty$. Udowodnij, że $\chi'(G) \leqslant \Delta + 1$.

Wskazówka: użyj twierdzenia Wizinga dla grafów skończonych.