Kolokwium 2

Metody probabilistyczne matematyki dyskretnej

16 stycznia 2020

Własność rozszerzania:

$$\forall_{\substack{U,W \subset V(G) \\ U \cap W = \emptyset \\ |U|,|W| < \infty}} \exists_{v \in V(G) \setminus (U \cup W)} : (U \subset N(v) \wedge W \cap N(v) = \emptyset) \tag{1}$$

Zadanie 1 (13p)**.** Przez $Z(k)$ oznaczmy najmniejszą liczbę n taką, że jeśli podzielimy zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ na dwa rozłączne podzbiory, to przynajmniej jeden z nich zawiera ciąg arytmetyczny długości k. Wykaż, że $Z(k) > 2^k/(8k)$.

Zadanie 2 (13p)**.** Niech $G = (V, E)$ będzie grafem nieskończonym. Korzystając z argumentu zwartości, udowodnij że jeśli dowolny skończony podgraf grafu G jest dwudzielny, to również G jest dwudzielny.

Zadanie 3 (12p)**.** Niech $\mathcal{R}$ będzie grafem Rada oraz $S \subset V(\mathcal{R})$. Definiujemy graf $\mathcal{R}'$ jako graf powstały z grafu $\mathcal{R}$ poprzez dodanie nieistniejących krawędzi między wierzchołkami ze zbioru S, tj.:

$$V(\mathcal{R}') = V(\mathcal{R}), \quad E(\mathcal{R}') = E(\mathcal{R}) \cup \{u, v \notin E(\mathcal{R}), u, v \in S\}$$

Udowodnij, że jeśli S jest zbiorem skończonym, to $\mathcal{R}'$ jest izomorficzny z grafem Rada. Czy teza ta zachodzi również gdy S jest zbiorem nieskończonym? Uzasadnij.

Zadanie 4 (12p)**.** Niech r będzie dowolną liczbą naturalną. Udowodnij, że asymptotycznie prawie wszystkie grafy nie zawierają zbioru dominującego liczebności r.

Wskazówka: użyj metody I momentu.